

COPIA UNICA BIBLIOTEC

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LII/2 - ANNO CXXIV

(1985)



LIGUORI EDITORE

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LII/2 - ANNO CXXIV

(1985)



LIGUORI EDITORE



Pubblicato da Liguori Editore
Via Mezzocannone 19, 80134 Napoli

© Liguori Editore, S.r.l., 1987

I diritti di traduzione, riproduzione e adattamento totale o parziale sono riservati per tutti i Paesi. Nessuna parte di questo volume può essere riprodotta, registrata o trasmessa con qualsiasi mezzo: elettronico, elettrostatico, meccanico, fotografico, magnetico (compresi microfilm, microfiches e copie fotostatiche).

Prima edizione italiana Aprile 1987

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

1990 1989 1988 1987

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa

Printed in Italy, Liguori Editore, Napoli

ISBN 88 - 207 - 1573 - 2

INDICE

M. de Vincentiis, R. Gualtieri - Histochemical Study of Actomyosin ATPase Activity of the Body Wall Muscle of the Ascidian <u>Halocynthia Papillosa</u> **.....	Pag. 9
E. Natale - Q-Varietà e teorie di Bordismo associate.....	" 17
S. Giuga - Su un problema di controllo ottimale relativo ad un Operatore Parabolico di Ordine 2m.....	" 29
V. Esposito - Un teorema di esistenza e unicità per alcune equazioni Ellittico Paraboliche del IV Ordine.....	" 41
V. Esposito, D. Miserendino - Nucleo di Poisson per un Operatore di tipo Gruschin in un semispazio.....	" 57
L. Simone, G. Carannante - Evolution of a Miocene Carbonate Open Shelf from Inception to Drowning: the Case of the Southern Apennines.....	" 77
V. Ferreri - Criteri di Analisi di Facies e classificazione dei Travertini Pleistocenici dell'Italia meridionale	" 121

Histochemical study of actomyosin ATPase activity of the body wall
muscle of the Ascidian *Halocynthia papillosa*.^{**}

Nota di Mario de Vincentiis*, Roberto Gualtieri*,

Giovanni Iazzetti* and Silvia Scippa*

Presentata dal Socio Prof. Mario de Vincentiis

Adunanza del 11/5/1985

RIASSUNTO. Le fibre del muscolo della parete del corpo, considerate negli Ascidieci come un classico muscolo liscio, mostrano istochimicamente nell'Ascidieo *Halocynthia papillosa* (subordine Stolidobranchia) una attivita' actomiosina ATPasica ed aspetti morfologici non caratteristici della fibra muscolare liscia.

ABSTRACT. The body wall muscle fibres, regarded in Ascidians as classic smooth muscle, exhibit in the Ascidian *Halocynthia papillosa* (suborder Stolidobranchia) an histochemical actomyosin ATPase activity and morphological features not similar to the smooth muscle.

INTRODUCTION.

The body wall muscle of Ascidians is regarded as a classic smooth muscle¹. Only the tail muscles of tadpole larvae and the muscle cells of the heart in the adult are reported as striated^{2,3}. An ultrastructural study has reported that the muscle cells of the body wall of the Ascidian *Halocynthia roretzi* (Stolidobranchia) are smooth and multinucleate⁴. Furthermore, biochemical studies have shown that *Halocynthia*

*II Chair of Histology and Embryology, Faculty of Sciences,
University of Naples, Zoological Station of Naples, Italy

^{**} Dedicated to Prof. Silvio Ranzi for his 85th birthday

roretzi smooth muscle has a regulation mechanism linked to troponin and tropomyosin system⁶ that is typical of Vertebrate striated muscle⁶.

Recently, furthermore, it has been studied with a biochemical method the actomyosin ATPase of the body wall muscle in seven Ascidian species showing an inhibition of the enzyme activity *in vitro* in presence of vanadate⁷.

In the present note, an histochemical method has been used to localize the actomyosin ATPase activity in the body wall muscle of the Ascidian *Halocynthia papillosa* (suborder Stolidobranchia).

MATERIAL AND METHOD.

Halocynthia papillosa specimen were collected in the Gulf of Naples. Body wall muscle sac pieces, obtained by removing the tunic, were placed on a cryostat support (IEC International Harris Cryostat, Model CT) in a drop of Tissue Tec OCT Compounds and quickly frozen by a jet of CO₂. Longitudinal or trasverse serial sections 8-10 μ m thick were made at -20 , -25 °C; these sections were then placed on glass slides and treated for the histochemical demonstration of myofibrillar' ATPase activity (actomyosin ATPase)⁸. Alkaline (18 mM CaCl₂ in 100 mM 2-amino-2-methyl-1-propanol pHs 10.6, 10.4, 10.2, and 9.8) and acid (50 mM potassium acetate, 18 mM CaCl₂, pHs 4.35, 4.5, 4.7, 4.9, and 5.2) preincubations were performed on unfixed sections since fixation markedly decreased the enzymatic activity. Preincubation times ranged from 5 to 30 minutes, and incubation times from 30 to 45 minutes.

As controls, sections were incubated either in a

substrate-free medium or in a medium containing paracloromercuribenzoate at concentrations ranging from 10 μ M to 1 mM.

Morphological observations were made on paraffin enclosed material. This material was fixed in Bouin's fluid and stained with Pasini's method⁹.

RESULTS AND DISCUSSION.

Myofibrillar ATPase activity was observed in the muscle fibres of the body wall of the Ascidian *Halocynthia papillosa* (Fig.1). The longitudinal sections showed some muscle fibres with a homogeneous enzymatic activity and other, instead, with histochemically stained zones alternating along the major axis of each fibre with unstained zones. The internal and external muscle layers showed no significative difference.

The histochemical reaction in each fibre was not modified after alkaline or acid preincubations at different pHs. Myofibrillar ATPase staining gradually disappeared outside 10.0-4.9 pH range. The enzymatic activity was not detected by incubating the sections in a substrate-free medium or in a medium containing paracloromercuribenzoate at concentrations of 100 μ M or more.

Also with histological preparation (Fig.2), a non-homogeneous aspect of the single fibres is generally showed in longitudinal sections. With this morphological method, indeed, it is possible to see a pattern of bandings due to a different staining intensity in different zones of the same fibre.

These observations seem to indicate that *Halocynthia papillosa* parietal muscle possesses ATPase histochemical and morphological features not found in a classic smooth muscle.

Our results, with the ultrastructural and biochemical findings in *Halocynthia roretzi*^{4,5}, extend the hypothesis that at least in the Ascidian genus *Halocynthia* the body wall muscle is "...intermediate between the striated and smooth muscle..."⁴.

REFERENCES.

1. Hanson J. and J. Lowy - 1960 - Structure and function of the contractile apparatus in the muscles of invertebrate animals. in: "The structure and function of muscle." G.H.Bourne ed., Academic Press, New York, vol.I, p.268-335
2. Pucci-Minafra I. - 1965 - Ultrastructure of muscle cells in *Ciona intestinalis* tadpoles. Acta Embryol. Morphol. Exper. 8:289-305
3. Nunzi M.G., P. Buriguel and S. Schiaffino - 1979 - Muscle cell differentiation in the Ascidian heart. Dev. Biol. 68:371-380
4. Shinohara Y. and K. Konishi - 1982 - Ultrastructure of the body wall muscle of the Ascidian *Halocynthia roretzi*: smooth muscle cells with multiple nuclei. J.Exp. Zool. 221:137-142
5. Toyota N., T. Obinata and K. Terakado - 1979 - Isolation of troponin-tropomyosin-containing thin filaments from Ascidian smooth muscle. Comp. Biochem. Physiol. 62B:433-441
6. Alberts B., Bray D., Lewis J., Raff M., Roberts K., Watson J.D. - 1983 - Molecular biology of the cell. Garland Publishing Inc., New York & London
7. Michibata H., I. Nishiyama, R. Gualtieri and M. de Vincentiis - 1985 - Inhibition by vanadate of actomyosin ATPase extracted from Ascidians. Comp. Biochem. Physiol. 80B:247-250
8. Guth L. and F.J. Samaha - 1970 - Procedure for the histochemical demonstration of actomyosin ATPase. Exp. Neurol. 28:365-367
9. Gray P. - 1954 - The microtometist's formulary and guide. The Blakiston Company inc., New York & Toronto

La presente nota e' stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai Soci G. Chieffi, B. de Lerma e L. Jannelli.

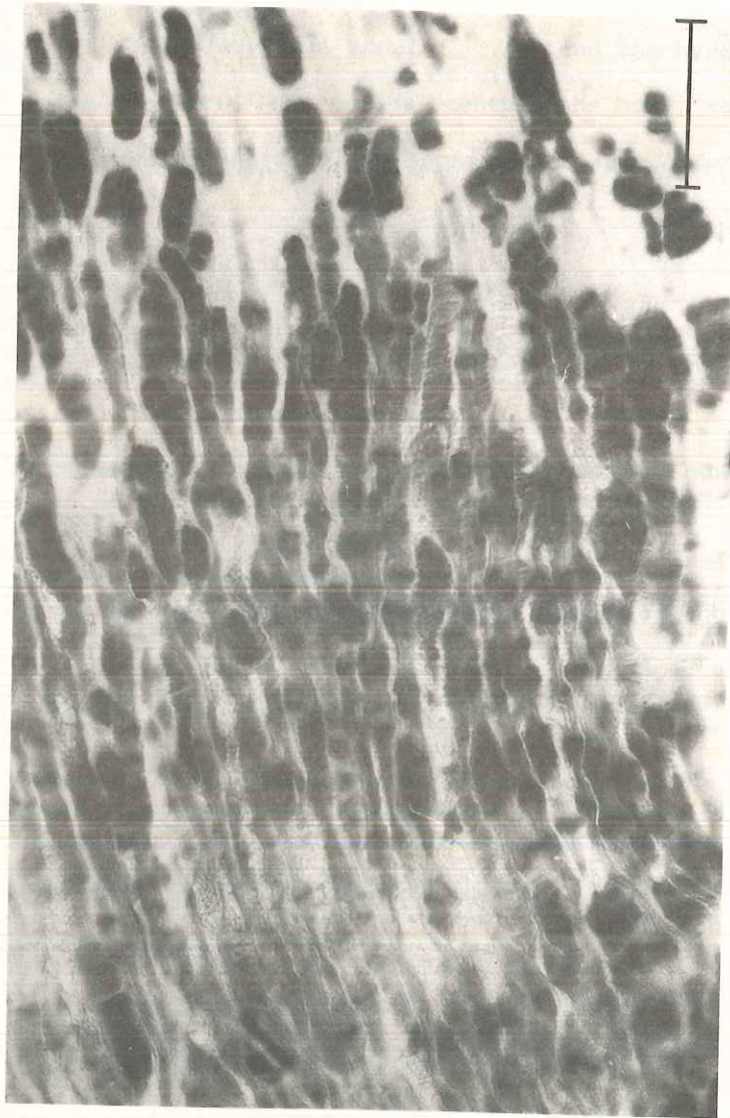


Fig.1 Halocynthia papillosa. Longitudinal section of body wall external muscle layer. Histochemical demonstration of myofibrillar ATPase activity.
Bar = 50 μ m.



Fig.2 Halocynthia papillosa. Longitudinal section of the body wall external muscle layer. Pasini's triple stain. Bar = 50 μ m.

Q-VARIETA' E TEORIE DI BORDISMO ASSOCIATE

Nota di Elvira NATALE (*)

Presentata dal Socio Ordinario A. Franchetta

(Adunanza del 1/6/1985)

Riassunto. In questo articolo si considerano le teorie $MSPL(-;\gamma)$ dei cicli a coefficienti Q ed aventi singolarità in codimensione $\geq \gamma$.

Se $0 \leq \delta \leq \gamma$ si danno condizioni necessarie e sufficienti affinché un elemento di $MSPL(X;\gamma)$ si annulli in $MSPL(X;\delta)$.

Abstract. In this paper we consider the bordism theories $MSPL(-;\gamma)$ of cycles with coefficients Q and carrying singularities in codimension $\geq \gamma$. If $0 \leq \delta \leq \gamma$ we give necessary and sufficient conditions for an element of $MSPL(X;\gamma)$ to be zero in $MSPL(X;\delta)$.

In questo lavoro consideriamo particolari cicli geometrici, chiamati (Q,n) -varietà, dove Q indica il campo dei numeri razionali ed n la dimensione.

La proposizione 1.6 stabilisce, per via diretta, che il PL bordismo orientato delle (Q,n) -varietà costituisce una teoria omologica isomorfa a $MSPL_*(-;Q)$, dove questo simbolo sta a indicare l'usuale PL bordismo orientato a coefficienti in Q .

Quindi, traendo spunto dal lavoro [3], definiamo teorie di bordismo intermedie tra $MSPL_*(-;Q)$ e $H_*(-;Q)$ ammettendo la presenza di ulteriori singolarità nei cicli rappresentativi. La tipica, tra queste teorie, viene denotata con $MSPL_*(-;\gamma)$ dove γ è un intero ≥ 2 che indica la codimensione nella quale si trovano le singolarità dei cicli.

(*) Accademia Aeronautica di Pozzuoli.

Inoltre, usando classi caratteristiche in $H^*(BSPL, Q)$ stabiliamo un isomorfismo esplicito tra $MSPL_*(-; \gamma)$ e $H_*(-; Q) \otimes MSPL_*(punto; \gamma)$.

Usando tale isomorfismo otteniamo il seguente risultato di tipo geometrico: sia $0 \leq \delta \leq \gamma$. Un elemento x in $MSPL_*(X, \gamma)$ si annulla in $MSPL_*(X, \delta)$ se e solo se certe ben definite ostruzioni omologiche svaniscono in $H_*(X)$ (cfr. corollario 1.15).

Lavoreremo nella categoria PL e, spesso, ometteremo il simbolo PL nelle notazioni.

$C(X)$ indicherà il cono su X di vertice C .

Il simbolo $[]$ starà a denotare la classe di bordismo o la classe fondamentale in omologia a seconda del contesto.

Premesso ciò diamo la seguente:

1.1 Definizione

Una (Q, n) -varietà (o Q -varietà di dimensione n) è una coppia di poliedri compatti (M, SM) che verifica le seguenti proprietà:

- (1) M -SM e SM sono PL varietà orientate di dimensioni n e $n-1$ rispettivamente (l'insieme vuoto viene considerato come una varietà di qualsiasi dimensione, quindi SM può essere vuoto).
- (2) Se V è una componente di SM, è dato un PL isomorfismo di coppie $h: (N, U) \rightarrow (V \times C(T), V)$ dove T è un insieme finito di punti orientati e N è un intorno regolare di V in M .

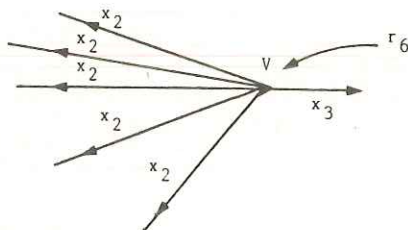
Si richiede che h si restringa ad un isomorfismo di PL varietà orientate tra $\overset{\circ}{N}-V$ e $V' = (V \times CT) - V \times C$.

Ciascuna componente di $\overset{\circ}{N}-V$ si chiamerà un foglio attaccato a V .

- (3) Ciascuna componente di M -SM è contrassegnata da un numero razionale del tipo $x_m = 1/m$, $m=1, 2, \dots$ e ciascuna componente di SM è contrassegnata da una relazione in Q del tipo $r_m = px_m - x_q$ dove $m = pq$ e $p \leq q$.

Pertanto, se V è una componente di SM, ciascun foglio attaccato a V eredita un contrassegno da M -SM.

(4) (Compatibilità). Supponiamo che $V \subset SM$ sia contrassegnata da $r_m = px_m - x_q$. Allora, attaccati a V , vi sono esattamente p fogli contrassegnati con x_m ed 1 foglio contrassegnato con x_q . Inoltre, l'orientazione presente su quest'ultimo foglio, induce su V l'orientazione opposta a quella data.



Il sottospazio ∂M di M dato da $\partial M = \partial(M-SM) \cup \partial SM$ è una PL varietà a coefficienti in Q di dimensione $n-1$ con struttura indotta dalla struttura di M per restrizione.

Chiamiamo ∂M il bordo di M .

1.2 Definizione

Un isomorfismo $(M, SM) \rightarrow (M', SM')$ è un PL omeomorfismo di coppie che conserva le orientazioni ed i contrassegni.

Indichiamo con $-M$ la varietà ottenuta da M invertendo tutte le orientazioni. Sia (X, A) una coppia di spazi topologici.

1.3 Definizione

Una (Q, n) -varietà singolare in (X, A) è una coppia (M, f) formata da una PL varietà M^n (a coefficienti in Q) e da un'applicazione (continua) $f: (M, \partial M) \rightarrow (X, A)$.

Se $A = \emptyset$, necessariamente $\partial M = \emptyset$.

1.4 Definizione

Una (Q, n) -varietà singolare (M, f) in (X, A) circonda, se esiste una $(Q, n+1)$ -varietà W ed una funzione $F: W \rightarrow X$ tale che:

(a) $\partial W = M' \cup M''$ dove M' e M'' sono $(Q, (n-1))$ -varietà a coefficienti in Q con

struttura indotta da $\partial W, M' \cap (-M'') = \partial M' = \partial(-M'')$ e vi è un isomorfismo

$$g: M \rightarrow M'.$$

(b) $F \circ g = f.$

(c) $F(M'') \subset A.$

1.5 Definizione

Due (Q,n) -varietà singolari (M_1, f_1) , (M_2, f_2) in (X,A) sono bordanti se l'unione disgiunta $(M_1 + M_2, f_1 \cup f_2)$ circonda in (X,A) .

Si verifica facilmente che il bordismo è una relazione di equivalenza tra le (Q,n) -varietà singolari di (X,A) .

Denotiamo con $[M, f]$ la classe di bordismo di (M, f) e con $MSPL_n(X, A, Q)$ l'insieme di tutte le classi di bordismo di (Q,n) -varietà singolari.

In $MSPL_n(X, A, Q)$ possiamo introdurre una struttura di gruppo abeliano per mezzo dell'unione disgiunta sui rappresentanti, cioè:

$$[M_1, f_1] + [M_2, f_2] = [M_1 + M_2, f_1 \cup f_2].$$

L'elemento neutro è rappresentato dalla classe costituita dalle varietà singolari che circondano.

Sia ora, $\varphi: (X, A) \rightarrow (Y, B)$. Esiste un omomorfismo indotto $\varphi_*: MSPL_n(X, A, Q) \rightarrow MSPL_n(Y, B, Q)$ definito "per composizione con φ ", cioè $\varphi_*[M, f] = [M, \varphi f]$.

Si verifica in modo standard che mediante tale omomorfismo la successione di gruppi $\{MSPL_n(X, A, Q)\}$ acquista una struttura di funtore covariante dalla categoria delle coppie topologiche e funzioni continue alla categoria dei Q -spazi vettoriali graduati e omomorfismi di grado zero.

Esiste una trasformazione naturale di grado -1

$$\partial: MSPL_n(X, A, Q) \rightarrow MSPL_{n-1}(A, \emptyset, Q)$$

data da

$$\partial[M, f] = [\partial M, f/\partial M].$$

Da ora in poi indicheremo $MSPL_n(A, \emptyset, Q)$ semplicemente con $MSPL_n(A, Q)$.

1.6 Proposizione

$\{MSPL_n(X, A, Q), \varphi_*, \partial\}$ è una teoria omologica naturalmente equivalente alla teoria $\{MSPL_n(X, A) \otimes Q, \varphi_* \otimes 1, \partial \otimes 1\}$.

Dimostrazione.

Consideriamo la presentazione $0 \rightarrow F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_0 \xrightarrow{\phi_0} Q \rightarrow 0$, dove F_0 è il gruppo abeliano libero generato dall'insieme $B_0 = \{x_m\}$ e F_1 è il gruppo abeliano libero generato da $B_1 = \{r_m\}$.

Una F_1 -varietà, $i=0,1,\dots$, è una PL varietà orientata nella quale ciascuna componente è etichettata da un elemento di B_1 .

Scriviamo $M \otimes x_m$ oppure $M \otimes r_m$ per indicare M etichettata da x_m o da r_m .

E' immediato vedere che il bordismo di F_1 -varietà definisce una teoria omologica $MSPL_n(X, A, F_1)$ naturalmente equivalente a $MSPL_n(X, A) \otimes F_1$.

Gli spazi (X, A) non giocano un ruolo essenziale nella dimostrazione, quindi li ignoreremo.

Consideriamo la trasformazione naturale

$$T: MSPL_n(-) \otimes Q$$

definita nel modo seguente:

sia $T_1: MSPL_n(-) \otimes F_0 \rightarrow MSPL_n(-, Q)$ la trasformazione naturale definita da $[M] \otimes x_m \rightarrow [M \otimes x_m]$.

Facciamo vedere che T_1 è zero sulle relazioni, cioè $T_1([M] \otimes r_m) = 0$.

Consideriamo la varietà etichettata $W = M \times L(r_m) \times [0,1]$ dove:

- (a) $L(r_m), (r_m = px_m - x_q)$, è la 0-varietà costituita da p punti etichettati x_m con orientazione $+$ e 1 punto etichettato x_q con orientazione $-$.
- (b) L'etichettatura nel prodotto topologico è quella indotta da $L(r_m)$.

In W identifichiamo tra loro le copie di $M \times \{0\} \times L(r_m)$ ed etichettiamo con r_m l'unica copia risultante. In tal modo si ottiene un Q -bordismo di $T_1([M] \otimes r_m)$ a zero. Segue che T_1 definisce un monomorfismo

$$T: MSPL_n(-) \otimes Q \rightarrow MSPL_n(-, Q).$$

Sia (M, SM) una (Q, n) -varietà. SM è una F_1 -varietà e inoltre il morfismo

$MSPL_{n-1} \otimes F_1 \xrightarrow{1 \otimes \phi_1} MSPL_{n-1} \otimes F_0$ trasforma $[SM]$ in $[\partial U]$ dove U è un intorno regolare di SM in M e ∂U ha le etichettature indotte da vari fogli attaccati alle componenti di SM . Ma ∂U è bordante a zero in $MSPL_{n-1} \otimes F_0$ poichè circonda $ch(M-U)$. Poichè $1 \otimes \phi_1$ è un monomorfismo si ha che SM è bordante a zero in $MSPL_{n-1} \otimes F_1$.

Sia W una F_1 -varietà circondata da SM e sia V una componente di W etichettata da $r_m \in B_1$.

Nell'unione disgiunta $Mx[0,1] \coprod VxCL(r_m)$ identifichiamo l'ovvio sottoinsieme di $Mx\{1\}$ con $\partial VxCL(r_m)$.

Effettuando tale operazione simultaneamente su tutte le componenti $\{V\}$ di W , si ottiene un bordismo W_1 tra M e una F_0 -varietà. Ciò dimostra che la trasformazione T è suriettiva e quindi è un isomorfismo. La naturalità di T e la proprietà di commutare con gli operatori di bordo sono ovvie, pertanto T rende $MSPL_*(X,A,Q)$ una teoria omologica isomorfa a $MSPL_*(X,A,_) \otimes Q$.

Sia M^n una (Q,n) -varietà. E' immediato, dalla definizione di (Q,n) -varietà, che M è ottenuta da una F_0 -varietà con bordo, W , identificando tra loro, mediante PL omeomorfismi prefissati, insiemi di componenti di ∂W . Pertanto, se $v_W: W \rightarrow BSPL$ è un'applicazione classificante il fibrato normale stabile di W , allora v_W induce, mediante passaggio al quoziente, un'applicazione $v: M \rightarrow BSPL$ che penseremo come "applicazione classificante il fibrato normale stabile di M " (anche se M non è una PL varietà in generale).

E' chiaro, inoltre, che M ha una classe omologica $[M]$ fondamentale a coefficienti in Q e che $v_M: M \rightarrow BSPL$ rappresenta l'immagine di $[M]$ tramite l'omomorfismo $(v_M)_*: H_n(M, Q) \rightarrow H_n(BSPL, Q)$.

La corrispondenza $M \rightarrow v_M$ induce un ben definito omomorfismo

$$v: MSPL_n(\text{punto}, Q) \rightarrow H_n(BSPL, Q)$$

il quale non è altro che l'usuale applicazione normale $MSPL_n \rightarrow H_n(BSPL)$ tensorizzata con il campo Q . Pertanto è ben noto che v è un monomorfismo.

Possiamo, quindi, scegliere una Q -base $\{[V_\lambda]\}$ per $MSPL_n \otimes Q$ e classi

caratteristiche duali $\{p_\lambda\}$ in $H^n(\text{BSPL}, Q)$, cioè tali che

$$\langle \cup_{V_\lambda} p_\mu, [V_\lambda] \rangle = \text{kronecker } \delta_{\lambda\mu}.$$

Passiamo ora a definire teorie di bordismo intermedie $\text{MSPL}_n(-, \gamma)$ che sono strettamente legate alla filtrazione nella successione spettrale di bordismo.

Sia $\mathbb{R}^\infty = \cup \mathbb{R}^n$ con la solita struttura PL.

1.7 Definizione

Una $\text{MSPL}_n(-, \gamma)$ -varietà è una terna $\Phi = (M, \varphi, M_0)$ dove:

- (1) M è una (Q, n) -varietà.
- (2) $M_0 \subseteq \partial M$ è una sottovarietà di codimensione zero regolarmente immersa e con Q -struttura indotta da quella di ∂M .
- (3) $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ è un'applicazione PL.
- (4) $\dim \varphi(M - M_0) \leq n - \gamma$ e $\dim \varphi(\partial M_0) \leq n - \gamma - 1$.

1.8 Definizione

$\Phi_0 = (M_0, \varphi/M_0, \emptyset)$ è una $\text{MSPL}_n(-, \gamma)$ -varietà che dicesi bordo di Φ .

Sia ora (X, A) una coppia di spazi topologici.

1.9 Definizione

Una $\text{MSPL}_n(-, \gamma)$ varietà singolare in (X, A) è una coppia (Φ, f) formata da una $\text{MSPL}_n(-, \gamma)$ -varietà $\Phi = (M, \varphi, M_0)$ e da un'applicazione (continua)

$$f: (\varphi(M), \varphi(M_0)) \rightarrow (X, A).$$

Se $A = \emptyset$ necessariamente $M_0 = \emptyset$

1.10 Definizione

Una $\text{MSPL}_n(-, \gamma)$ -varietà singolare (Φ, f) in (X, A) circonda se esiste una $\text{MSPL}_n(-, \gamma)$ -varietà $\Sigma = (N, \sigma, N_0)$ ed una funzione $F: \sigma(N) \rightarrow X$ tale che:

- (a) $\partial \Sigma = (M' \cup M'', \varphi' \cup \varphi'', M'_0 \cup M''_0)$.
- (b) $\Phi' = (M', \varphi', M'_0)$, $\Phi'' = (M'', \varphi'', M''_0)$ sono $\text{MSPL}_n(-, \gamma)$ -varietà ed inoltre $M' \cap (-M'') = M'_0 = -M''_0$.
- (c) Vi è isomorfismo tra Φ e Φ' cioè un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} M_0 & \xrightarrow{\text{rest. di } g} & M'_0 \\ \cap & & \cap \\ M & \xrightarrow{g} & M' \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi' \\ \varphi(M) & \xrightarrow{\bar{g}} & \varphi'(M') \end{array}$$

ove g è un isomorfismo di (Q,n) -varietà e $\bar{g}$ un PL isomorfismo.

$$(d) F \circ \bar{g} = f.$$

$$(e) F(\varphi''(M'')) \subset A.$$

1.11 Definizione

Due $MSPL_n(-,\gamma)$ -varietà singolari $(\phi_1, f_1), (\phi_2, f_2)$ in (X,A) sono bordanti se l'unione disgiunta $(\phi_1 + \phi_2, f_1 \cup f_2)$ circonda in (X,A) essendo $\phi_1 + \phi_2 = (M_1 + M_2, \varphi_1 \cup \varphi_2, M_{10} + M_{20})$.

Il bordismo è una relazione di equivalenza nella classe delle $MSPL_n(-,\gamma)$ -varietà singolari di (X,A) in virtù delle seguenti proprietà di cui godono le $MSPL_n(-,\gamma)$ -varietà:

Prodotto : se $\phi = (M, \varphi, M_0)$, allora $\phi \times I = (M \times I, \varphi_I, M_0 \times I)$ è una $MSPL_{n+1}(-,\gamma)$ -varietà, dove $\varphi_I(x, t) = \varphi(x)$.

Attaccamento : siano : (a) ϕ, ϕ' $MSPL_n(-,\gamma)$ -varietà;

$$(b) V \subset M_0, V' \subset M'_0 \text{ tali che } \psi = (V, \varphi/V, \emptyset), \psi' = (V', \varphi'/V', \emptyset) \text{ siano } MSPL_n(-,\gamma)\text{-varietà;}$$

$$(c) g: \psi \rightarrow \psi' \text{ un isomorfismo di } MSPL_n(-,\gamma)\text{-varietà.}$$

Allora;

$$\phi \cup \phi' = (M \cup_g M', \varphi \cup_g \varphi', \text{ch}(M_0 - V) \cup \text{ch}(M'_0 - V')) \text{ è una } MSPL_n(-,\gamma)\text{-varietà.}$$

Tali proprietà sono più complicate ad enunciarsi che a verificarsi e pertanto ne lasciamo la dimostrazione al lettore.

La proprietà del prodotto assicura la riflessività della relazione di bordismo, mentre quella di attaccamento interviene nella transitività di tale relazione.

Denotiamo con $[\phi, f]$ la classe di bordismo di (ϕ, f) e con $MSPL_n(X, A; \gamma)$ l'insieme delle classi di bordismo delle $MSPL_n(-,\gamma)$ -varietà singolari.

$MSPL_n(X, A; \gamma)$ acquista una struttura di gruppo abeliano per mezzo della unione disgiunta sui rappresentanti delle classi, cioè:

$$[\phi_1, f_1] + [\phi_2, f_2] = [\phi_1 + \phi_2, f_1 \cup f_2].$$

Se $\theta : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ è un'applicazione (continua), esiste un omomorfismo indotto $\theta_* : \text{MSPL}_n(X, A; \gamma) \rightarrow \text{MSPL}_n(Y, B; \gamma)$ definito, nel solito modo, per composizione con θ , cioè

$$\theta_*[\phi, f] = [\phi, \theta \circ f].$$

In tal modo la successione $\{\text{MSPL}_n(X, A; \gamma)\}$ acquista una struttura di funtore covariante dalla categoria delle coppie topologiche alla categoria dei Q-spazi vettoriali graduati e omomorfismi di grado zero.

Inoltre, esiste una trasformazione naturale di grado -1.

$$\partial : \text{MSPL}_n(X, A; \gamma) \rightarrow \text{MSPL}_{n-1}(A, \emptyset; \gamma)$$

data da

$$\partial[\phi, f] = [\partial\phi, f/\mathcal{P}(M_0)].$$

1.12 Teorema

$(\text{MSPL}_n(X, A; \gamma), \theta_*, \partial)$ è una teoria omologica.

Dimostrazione

Gli assiomi di omotopia ed esattezza si verificano nel modo standard usando le proprietà del prodotto e dell'attaccamento (di $\text{MSPL}_n(-, \gamma)$ -varietà) precedentemente enunciate.

La verifica dell'assioma di escissione, che usa risultati standard di topologia PL sugli intorni regolari, è del tutto simile a quella che si trova, ad esempio in [4] II 3.1, solo leggermente più complicata per la presenza delle Q-singularità SM.

Si hanno trasformazioni naturali

$$\dots \rightarrow \text{MSPL}_*(X, \gamma+1) \rightarrow \text{MSPL}_*(X, \gamma) \rightarrow \dots$$

definite mediante l'identità sui rappresentanti

$$\text{MSPL}_*(X, Q) \rightarrow \text{MSPL}_*(X, \gamma) \quad \text{definita da}$$

$$[M, f] = [\phi, f] \quad \text{dove } \phi = (M, M \subset \mathbb{R}^\infty, \text{ insieme vuoto}).$$

Si lascia al lettore, come semplice verifica, la dimostrazione del seguente lemma:

1.13 Lemma

Se $n \leq \gamma-1$, $\text{MSPL}_n(X, \gamma+1) \rightarrow \text{MSPL}_n(X, \gamma)$ è suriettiva.

Se $n \leq \gamma-2$, $\text{MSPL}_n(X, Q) \rightarrow \text{MSPL}_n(X, \gamma)$ è biunivoca.

Se $n \geq \gamma-1$, $\text{MSPL}_n(\text{punto}, \gamma) = 0$.

Pertanto $\text{MSPL}_*(\text{punto}, \gamma) = \text{MSPL}_0 \otimes Q, \text{MSPL}_1 \otimes Q, \dots, \text{MSPL}_{\gamma-2} \otimes Q, 0, \dots, 0$.

Definiamo

$$\overline{\text{MSPL}}_n(X, \gamma) = \sum_{p+q=n} H_p(X, Q) \otimes \text{MSPL}_q(\text{punto}, \gamma) = \sum_{\substack{p+q=n \\ q \leq \gamma-2}} H_p(X, Q) \otimes \text{MSPL}_q$$

e una trasformazione naturale

$h^Y: \overline{\text{MSPL}}_*(X, \gamma) \rightarrow \overline{\text{MSPL}}_*(X, \gamma)$ come segue:

consideriamo un $\text{MSPL}_n(-, \gamma)$ -ciclo (M, φ, f) in X con $q \leq \gamma-2$.

Scriviamo $K = \varphi(M)$ e $K_0 = \varphi(\partial M)$ (entrambi sottopoliedri di $\mathbb{R}^\infty$).

Abbiamo

$$M \xrightarrow{\varphi} K \xrightarrow{f} X$$

e quindi

$$H_{n-q}(M, \partial M, Q) \xrightarrow{\varphi_*} H_{n-q}(K, K_0, Q) \xrightarrow{\sigma} H_{n-q}(K, Q) \xrightarrow{f_*} H_{n-q}(X, Q).$$

Ora, σ è un isomorfismo poichè (M, φ) è un $\text{MSPL}_n(-, \gamma)$ -ciclo e quindi $\dim(K_0) \leq n-\gamma \leq n-q-2$ per ipotesi.

Per giungere ai corollari 1.14 ed 1.15 procediamo come in [3] §3.

Definiamo $h_q^Y(M, \varphi, f)$ mediante la formula:

$$h_q^Y(M, \varphi, f) = \sum_{\lambda} f_* \sigma^{-1} \varphi_* (v_M^* P_{\lambda} \cap [M, \partial M]) \otimes [V_{\lambda}]$$

Se (M, φ, f) circonda, si vede facilmente che $h_q^Y(M, \varphi, f) = 0$. Definiamo $h^Y = h_0^Y + \dots + h_{\gamma-2}^Y$. Si vede facilmente che h^Y è naturale su X .

Per $X = *$, $\text{MSPL}_n(*, \gamma) \cong \text{MSPL}_n(-, \gamma)$ e $\overline{\text{MSPL}}_n(-, \gamma) \cong \text{MSPL}_n(-, \gamma)$.

Entrambi sono zero per $n \geq \gamma-1$, quindi assumiamo $n \leq \gamma-2$.

Allora $h_n^Y[M] = \sum_{\lambda} \langle v_M^* P_{\lambda}, [M] \rangle \otimes [V_{\lambda}] = 1 \otimes [M]$.

Pertanto h^Y è una isomorfismo per $X = *$ e, quindi, per ogni X .

1.14 Corollario

Sia $[M, \varphi, f]$ un elemento di $\text{MSPL}_n(X, \gamma)$.

Allora (M, φ, f) circonda in $\text{MSPL}_n(-, \gamma)$ (cioè tale elemento è nullo) se e solo se tutte le classi $(f_* \sigma^{-1} \varphi_* (v_M^* P_{\lambda} \cap [M, \partial M]))$ si annullano in $H_{n-q}(X)$

per $q \leq \gamma - 2$.

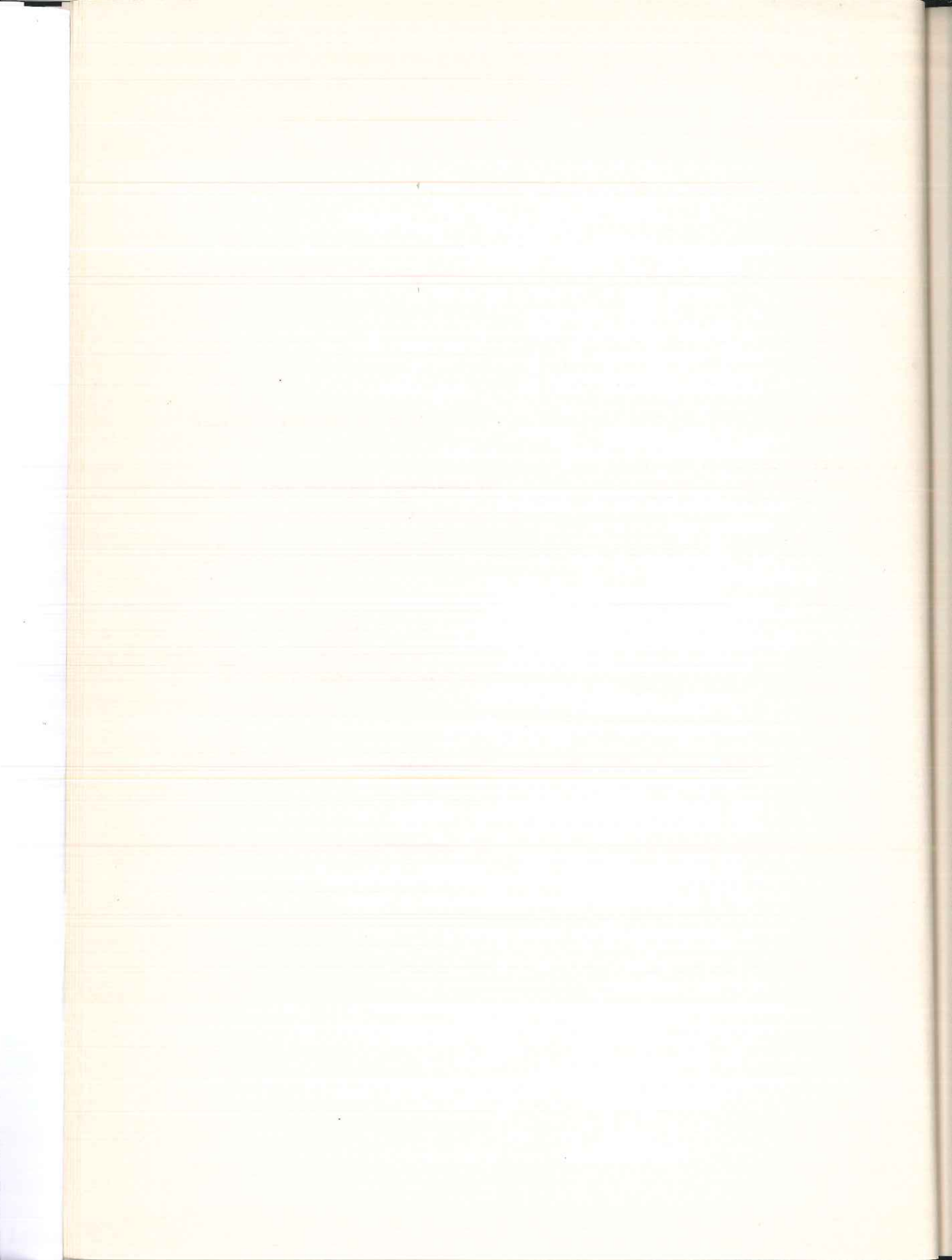
1.15 Corollario

Sia $[M, \varphi, f] \in \text{MSPL}_n(X, \gamma)$ e $0 \leq \delta \leq \gamma$.

Allora (M, φ, f) circonda in $\text{MSPL}_n(X, \delta)$ se e solo se tutte le classi $f_* \sigma^{-1} \varphi_* (\nu_M p_\lambda \cap [M, \partial M])$ si annullano in $H_{n-q}(X)$ per $q \leq \delta - 2$.

B I B L I O G R A F I A

- [1] Browder, W., Liulevicius, A. and Paterson, F.
"Cobordism theories" Ann. of Math. 84 (1966), 91-101.
- [2] Buoncristiano S. e Dedò M.
"On resolving singularities and relating bordism to homology" Annali S.N.S., Pisa 4 (1980), 605-624.
- [3] Buoncristiano S. and Hacon D.
"Resolving homologies in BPL and PL characteristic numbers" Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1983), 93, 263-269.
- [4] Buoncristiano S., Rourke C.P. and Sanderson B.J.
"A geometric approach to homology theory" London Math. Soc. Lecture Notes, n° 18, Cambrige Univ. Press, London 1976.
- [5] Kato M.
"Topological resolution of singularities" Topology 12 (1973), 355-372.
- [6] Levitt N. and Rourke C.P.
"Combinatorial formulae for characteristic classes" Trans. Amer. Math. Soc. 239 (1978), 391-397.
- [7] Sullivan D.
"Singularities in spaces" Proc. of Liverpool Singularities Symposium : II Lecture Notes in Mathematics, n° 209 (1971), 196-206.



SU UN PROBLEMA DI CONTROLLO OTTIMALE RELATIVO AD UN OPERATORE
PARABOLICO DI ORDINE $2m$. (*)

Nota di Salvatore Giuga, (**)

Presentata dal Socio Ordinario Donato Greco,
Adunanza del 16/11/1985

Riassunto.- Si dimostra l'esistenza e l'unicità del controllo ottimale relativo ad un processo di diffusione e se ne studia la regolarità.

Abstract.- We prove the existence and uniqueness of the optimal control for a diffusion process; we study its regularity too.

Introduzione

In [1] M. Giugu considera il processo di diffusione descritto dal seguente sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} & t \in [t_0, T], \quad x \in [0, 1] \\ y(t, 0) = v_1(t), \quad y(t, 1) = v_2(t), \quad y(0, x) = \varphi(x), \end{cases}$$

dove

$$v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} = Cz(t)$$

con C matrice ad elementi costanti e $z(t)$ soluzione del problema:

$$(1) \quad \begin{cases} z'(t) = Az + Bu \\ z(t_0) = z_0 \end{cases} \quad (z_0 \in \mathbb{R}^m)$$

$u(t)$ essendo un controllo ed A e B essendo matrici ad elementi reali.

Considerato poi il funzionale quadratico (costo):

$$(2) \quad \begin{aligned} J(u) = & \int_0^1 \int_0^1 \int_{t_0}^T K_1(t, x, \xi) y(x, t) y(\xi, t) dx d\xi dt + \int_0^1 \int_0^1 K_2(x, \xi) y(x, T) y(\xi, T) dx d\xi + \\ & + \int_{t_0}^T \langle G_1(t) u(t), u(t) \rangle dt + \int_{t_0}^T \langle G_2(t) z(t), z(t) \rangle dt + \langle G_3 z(T), z(T) \rangle \end{aligned}$$

e assumendo come spazio dei controlli $L^2(0, T; \mathbb{R}^k)$, dimostra che, se le matrici A, B , nonché i nuclei che intervengono in $J(u)$ sono continui, esiste un unico controllo $\tilde{u}$ (controllo ottimale) che minimizza il funzionale $J(u)$; inoltre ottiene una rappresentazione di $\tilde{u}$ dalla quale si deduce che

(*) Lavoro eseguito con fondi erogati dal Ministero della Pubblica Istruzione.

(**) Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università di Napoli, Facoltà di Ingegneria.

detto controllo ottimale è anche continuo.

Questioni similari sono state trattate in [5], [6], [7].

In questa nota, nell'ordine di idee di [1], si considera il seguente sistema:

$$(3) \quad \begin{cases} \partial_t y = Ly & \text{su } \Omega \times]0, T] ; \quad \Omega = R^{n-1} \times R^+ ; \quad \partial_t y = \frac{\partial y}{\partial t} \\ y(x, 0) = y_0(x) & y_0(x) \in H^{2m}(\Omega) ; \quad m \in \mathbb{N} \\ \partial_{x_n}^{j-1} y(x', 0, t) = e^{-|x'|^2} v_j(t, u) ; & x = (x', x_n) \in \Omega ; \quad j = 1 \dots m \end{cases}$$

e

$$v(t) = \begin{pmatrix} v_1(t, u) \\ \dots\dots\dots \\ v_m(t, u) \end{pmatrix} = C \int_0^t z(\tau) d\tau$$

C essendo una matrice ad elementi costanti e $z(t)$ soluzione del problema (1). Ad esso si associa il relativo costo e si dimostra l'esistenza e l'unicità in $L^2(0, T; R^k)$ del controllo $\tilde{u}$ minimizzante $J(u)$ (cfr. n. 2).

Seguendo lo schema di [1] si costruisce (cfr. n. 3) lo stato aggiunto del sistema in esame che consente di ottenere una rappresentazione del controllo ottimale; detta rappresentazione è resa possibile da un teorema di regolarità della soluzione del problema (3) preliminarmente stabilito (cfr. n. 1). Inoltre, attraverso la rappresentazione di $\tilde{u}$ così ottenuta, ricorrendo ancora al suddetto teorema di regolarizzazione, si dimostra che il controllo ottimale è continuo e si determinano condizioni che assicurano una maggiore regolarità per $\tilde{u}$.

1- Regolarità della soluzione di un problema parabolico.

Sia L un operatore differenziale lineare di ordine $2m$ ($m \geq 1$) uniformemente ellittico in $\bar{\Omega} = R^{n-1} \times R_0^+$ a coefficienti reali di classe $C^\infty(\bar{\Omega})$ convergenti all'infinito con tutte le derivate della forma:

$$L = (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} \partial_x^\alpha a_\alpha(x) \partial_x^\alpha \quad \left(\partial_x^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \right)$$

e tale che

$$(1.1) \quad \sum_{|\alpha|=m} \int_{\bar{\Omega}} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha \varphi(x) \partial_x^\alpha \bar{\varphi}(x) dx \leq 0 \quad \forall \varphi \in H_0^m(\bar{\Omega}).$$

Sussiste il seguente

Teorema 1.1 - Siano $y_0(x)$ e $g(x, t)$ funzioni reali definite rispettivamente in Ω e $\Omega \times [0, T]$. Se $y_0 \in L^2(\Omega)$ e $g \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ¹⁾ il problema:

1) Se X è uno spazio di Hilbert e f è definita in (a, b) e a valori in X $f \in L^2(a, b; X) \Leftrightarrow \int_a^b \|f\|_X^2 dt < \infty$.

$$(1.2) \quad \begin{cases} \partial_t y = Ly + g(x, t) & \text{su } \Omega \times]0, T] \\ y(x, 0) = y_0(x) \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione $y \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^m(\Omega))$ ed esiste una costante positiva k per la quale risulta:

$$(1.3) \quad \|y(x, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq k(\|y_0(x)\|_{L^2(\Omega)} + \|g(x, t)\|_{L^2(\Omega)}) \quad \forall t \in]0, T].$$

Inoltre, se

$$i) \quad y_0(x) \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$$

$$ii) \quad g(x, t) \in C^0([0, T]; H^{2m}(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)),$$

risulta:

$$(1.4) \quad y(x, t) \in C^1([0, T]; L^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; H_0^m(\Omega)) \cap C^0([0, T]; H^{2m}(\Omega)).$$

Dim. In virtù dell'ipotesi (1.1) nello spazio $L^2(\Omega)$ munito dell'ordinario prodotto scalare l'operatore L di dominio $H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ e codominio $L^2(\Omega)$ è dissipativo (cfr. [3] pag. 250). Conseguentemente, per il Teorema di Phillips e Lumer (cfr. [3] pag. 250), L è il generatore infinitesimale di un semigruppone contrazione di classe (C_0) in $L^2(\Omega)$, che indichiamo con T_t , il quale per la particolare forma dell'operatore L è anche un semigruppone olomorfo. Per il Principio di Duhamel il problema (1.2) (cfr. [3] pag. 431) ammette, quindi, in $C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ la unica soluzione:

$$(1.5) \quad y(x, t) = Y(x, t) + \int_0^t Z(x, t-s) ds$$

con

$$Y(x, t) = T_t y_0(x) \quad ; \quad Z(x, t-s) = T_{t-s} g(x, s) \quad (t \in [0, T] \quad ; \quad s \in [0, t]).$$

Dimostriamo preliminarmente che $y \in L^2(0, T; H_0^m(\Omega))$. A tale scopo osserviamo che essendo T_t olomorfo (cfr. [3] pag. 254) $Y(x, t) \in H_0^m(\Omega) \quad \forall t \in [0, T]$, inoltre, essendo $\partial_t Y = LY$, risulta

$$\int_{\Omega} Y(x, t) \partial_t Y(x, t) dx = \int_{\Omega} Y(x, t) LY(x, t) dx \quad \forall t \in [0, T].$$

Di qui per la (1.1) si trae

$$(1.6) \quad \int_{\Omega} Y(x, t) \partial_t Y(x, t) dx = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} a_{\alpha}(x) \partial_x^{\alpha} Y(x, t) \partial_x^{\alpha} Y(x, t) dx \leq 0.$$

e quindi, se $t_0 \in]0, T]$,

$$(1.7) \quad \int_{t_0}^t \int_{\Omega} Y(x, \tau) \partial_{\tau} Y(x, \tau) dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (Y^2(x, t) - Y^2(x, t_0)) dx \leq 0 ;$$

pertanto vale la disuguaglianza:

$$\int_{\Omega} Y^2(x, t) dx \leq \int_{\Omega} Y^2(x, t_0) dx \quad \forall t \in [t_0, T],$$

dalla quale, tenuto conto della continuità di T_t passando al limite per $t_0 \rightarrow 0$, si deduce:

$$(1.8) \quad \|Y(x, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|y_0(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall t \in [0, T],$$

e quindi anche, per la (1.7):

$$(1.9) \quad - \int_0^t \int_{\Omega} Y(x, \tau) \partial_{\tau} Y(x, \tau) dx \leq \|y_0(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall t \in]0, T].$$

D'altra parte anche per la (1.6), essendo L uniformemente ellittico e Y reale, esistono delle costanti positive k_1 e k_2 tali che:

$$- \int_{\Omega} Y(x, t) L Y(x, t) dx \geq k_1 \|Y(\cdot, t)\|_{H^m(\Omega)}^2 - k_2 \|Y(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

per cui, tenuto conto della (1.8), risulta:

$$\|Y(\cdot, t)\|_{H^m(\Omega)}^2 \leq k \left(- \int_{\Omega} Y(x, t) \partial_{\tau} Y(x, t) dx + \|y_0(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \quad (k \in \mathbb{R}^+ ; t \in]0, T]).$$

Integrando questa disuguaglianza nell'intervallo $(0, T)$ e utilizzando la (1.9) si ha:

$$(1.10) \quad \int_0^T \|Y(\cdot, t)\|_{H^m(\Omega)}^2 dt \leq c \|y_0(x)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (c \in \mathbb{R}^+)$$

e quindi $Y \in L^2(0, T; H_0^m(\Omega))$.

In maniera analoga si prova anche che $Z \in L^2(0, t; H_0^m(\Omega))$ per ogni $t \in]0, T]$ ed esiste una costante positiva c tale che:

$$(1.11) \quad \|Z(x, t-s)\|_{H^m(\Omega)}^2 \leq c \|g(x, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall s \in [0, t].$$

Ne segue che $\int_0^t Z(x, t-s) ds \in L^2(0, T; H_0^m(\Omega))$ per cui, tenuto conto della (1.5), resta dimostrato che $y \in L^2(0, T; H_0^m(\Omega))$.

Dalle (1.10) e (1.11) si deduce, inoltre, la disuguaglianza (1.3).

Dimostriamo ora che, nelle ipotesi i) e ii) vale la (1.4). Osserviamo che, in tali ipotesi, risulta $Ly_0(x) + g(x,0) \in L^2(\Omega)$ e $\partial_t g(x,t) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ onde il problema:

$$(1.12) \quad \begin{cases} \partial_t \eta = L\eta + \partial_t g(x,t) \\ \eta(x,0) = Ly_0(x) + g(x,0) \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione $\eta \in C^0([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^m(\Omega))$. Osserviamo inoltre che, per la (1.5) e la (1.11), $\eta(x, \cdot)$ è, come funzione a valori in $L^2(\Omega)$, assolutamente continua sui compatti di $(0,T)$ e pertanto risolve il problema (1.12) anche nel senso delle distribuzioni. Ciò posto consideriamo la funzione:

$$F(x,t) = y_0(x) + \int_0^t \eta(x,s) ds ;$$

risulta evidentemente $F \in C^1([0,T];L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H_0^m(\Omega))$ e $F(x,0) = y_0(x)$. Dimostriamo che risulta anche $F(x,t) = y(x,t)$ per ogni $(x,t) \in \Omega \times]0,T]$ cioè che proverà che $y \in C^1([0,T];L^2(\Omega)) \cap H^1(0,T;H_0^m(\Omega))$. A tal fine basterà dimostrare che F è soluzione del problema (1.2) nel senso delle distribuzioni in $\Omega \times]0,T]$. Invero, se $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \times]0,T])$, tenuto conto che L è autoaggiunto si ha:

$$(1.13) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_0^T F(x,t) (\partial_t + L) \varphi(x,t) dx dt = - \int_{\Omega} \int_0^T \varphi(x,t) \partial_t F(x,t) dx dt + \\ & + \int_{\Omega} \int_0^T (y_0(x) + \int_0^t \eta(x,s) ds) L \varphi(x,t) dx dt = - \int_{\Omega} \int_0^T \eta(x,t) \varphi(x,t) dx dt + \\ & + \int_{\Omega} \int_0^T (y_0(x) + \int_0^{t_0} \eta(x,s) ds) L \varphi(x,t) dx dt + \int_{\Omega} \int_0^T (\int_{t_0}^t \eta(x,s) ds) L \varphi(x,t) dx dt . \end{aligned}$$

D'altra parte, denotata con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualità tra $C_0(\Omega)$ e $D'(\Omega)$, risulta

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_0^T (\int_{t_0}^t \eta(x,s) ds) L \varphi(x,t) dx dt = \int_0^T dt \int_{t_0}^t ds \int_{\Omega} \eta(x,s) L \varphi(x,t) dx = \\ & = \int_0^T dt \int_{t_0}^t \langle L \eta(\cdot, s), \varphi(\cdot, t) \rangle ds = \int_0^T dt \int_{t_0}^t \langle \partial_s \eta(\cdot, s) - \partial_s g(\cdot, s), \varphi(\cdot, t) \rangle ds = \\ & = \int_0^T \langle \partial_s \eta(\cdot, s) - \partial_s g(\cdot, s) \rangle ds, \varphi(\cdot, t) \rangle dt = \int_0^T \langle \eta(\cdot, t) - \eta(\cdot, t_0) - g(\cdot, t) + \end{aligned}$$

$$+ g(., t_0), \varphi(., t) > dt = \int_0^T dt \int_{\Omega} \varphi(x, t) (\eta(x, t) - \eta(x, t_0) - g(x, t) + g(x, t_0)) dx.$$

Ne segue sostituendo nella (1.13):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_0^T F(x, t) (\partial_t + L) \varphi(x, t) dx dt &= - \int_{\Omega} \int_0^T g(x, t) \varphi(x, t) dx dt - \\ &- \int_{\Omega} \int_0^T (\eta(x, t_0) - g(x, t_0) - Ly_0(x)) \varphi(x, t) dx dt + \int_{\Omega} \int_0^T dx dt \int_0^{t_0} \eta(x, s) L \varphi(x, t) ds \end{aligned}$$

e di qui, passando al limite per $t_0 \rightarrow 0$ si ha l'asserto.

Pertanto $\partial_t y \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ e poichè per ipotesi $g \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ da (1.2) si trae che anche $Ly \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$. Da noti risultati sugli operatori ellittici si deduce anche che $y \in C^0([0, T]; H^{2m}(\Omega))$ e resta provato che sussiste la (1.4).

Siano $A(t)$ e $B(t)$ matrici a elementi reali rispettivamente di tipo $\ell \times \ell$ e $\ell \times k$. Supponiamo che

$$a) \quad A \in C^0([0, T]) \quad ; \quad B \in H^1(0, T).$$

Ciò posto per ogni $u \in L^2(0, T; R^k)$ denotiamo con $z_u(t)$ la soluzione del problema di Cauchy:

$$(1.14) \quad \begin{cases} z' = Az + Bu \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad (z_0 \in R^{\ell})$$

E' noto che (cfr. [2]) la soluzione di tale problema è la seguente:

$$z_u(t) = \Phi(t, 0) + \int_0^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \quad \forall t \in [0, T]$$

dove $\Phi \in C^1([0, T] \times [0, T])$ è la matrice di evoluzione generata da A .

Indicando con C una matrice di tipo $m \times \ell$ ad elementi costanti, poniamo:

$$(1.15) \quad v_u(t) = C \int_0^t z_u(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} v_1(t, u) \\ \dots \\ v_m(t, u) \end{pmatrix}$$

Poichè nell'ipotesi a) risulta $z_u(t) \in H^1(0, T; R^{\ell})$, è evidente che $v_u(t) \in H^2(0, T; R^m)$.

Consideriamo, ora, il problema al contorno:

$$(1.16) \quad \begin{cases} \partial_t y = Ly & \text{su } \Omega \times]0, T] \quad (\Omega = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^+) \\ y(x, 0) = y_0(x) \\ \partial_{x_n}^{j-1} y(x', 0, t) = e^{-|x'|^2} v_j(t, u) \quad (j = 1, \dots, m; \quad x = (x', x_n) \in \bar{\Omega}) \end{cases}$$

con

$$\beta) \quad y_0 \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$$

Dal Teorema 1.1 discende che, nelle ipotesi $\alpha)$, $\beta)$ questo problema ammette un'unica soluzione nello spazio $C^1([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C^0([0, T]; H^{2m}(\Omega))$.

Infatti posto:

$$(1.17) \quad \begin{aligned} \bar{y}(x, t) &= e^{-|x'|^2} \sum_{j=1}^m \frac{x_n^{j-1}}{j-1!} v_j(t, u) \quad ; \quad g(x, t) = -\partial_t \bar{y}(x, t) - L\bar{y}(x, t) \\ y^* &= y - \bar{y} \quad ; \quad y_0^* = y_0 - \bar{y}(x, 0) \end{aligned}$$

risulta $y_0^*(x) = y_0(x)$; $g(x, t) \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$ e il problema (1.16) diviene:

$$\begin{cases} \partial_t y^* = Ly^* + g(x, t) \\ y^*(x, 0) = y_0^*(x) \\ \partial_{x_n}^{j-1} y^*(x', 0, t) = 0 \end{cases}$$

il quale, per il Teorema 1.1, è univocamente risolubile in $C^1([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C^0([0, T]; H^{2m}(\Omega))$.

2 - Il problema di controllo ottimale .

Indicata con y_u la soluzione del problema (1.16) consideriamo il seguente funzionale quadratico (costo):

$$(2.1) \quad \begin{aligned} J(u) &= \int_{\Omega} \int_{\Omega} \int_0^T K_1(t, x, \xi) y_u(x, t) y_u(\xi, t) dx d\xi dt + \int_{\Omega} \int_{\Omega} K_2(x, \xi) y_u(x, T) y_u(\xi, T) dx d\xi + \\ &+ \int_0^T \langle G_1(t) u(t), u(t) \rangle dt + \int_0^T \langle G_2(t) z_u(t), z_u(t) \rangle dt + \langle G_3 z_u(T), z_u(T) \rangle \end{aligned}$$

dove:

il simbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota il prodotto scalare in $\mathbb{R}^h$ ($h \geq 1$) ;

K_1 e K_2 sono nuclei semidefiniti positivi e simmetrici in $\Omega \times \Omega$;

G_1 è una matrice ad elementi reali di tipo $k \times k$ simmetrica e definita positiva ;

G_2 è una matrice ad elementi reali di tipo $m \times m$ semidefinita positiva e coincidente con la sua trasposta G_2^* ;

G_3 è una matrice ad elementi costanti simmetrica e semidefinita positiva di tipo $\ell \times \ell$.

Consideriamo il seguente problema di controllo ottimale: *determinare una funzione $\tilde{u} \in L^2(0, T; R^k)$ (controllo ottimale) tale che $J(\tilde{u}) \leq J(u)$ per ogni $u \in L^2(0, T; R^k)$.*

Sussiste il seguente:

Lemma 2.1 - Nelle ipotesi a) , b) e se inoltre risulta:

$$\gamma) K_1 \in C^0([0, T] \times \Omega \times \Omega) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega \times \Omega)) ; K_2 \in C^0(\Omega \times \Omega) \cap H^{2m}(\Omega \times \Omega) \cap H_0^m(\Omega \times \Omega) ;$$

$$G_1 \in C^0([0, T]) ; G_2 \in L^2(0, T) ;$$

il funzionale $J(u)$ verifica in $L^2(0, T; R^k)$ le seguenti proprietà:

- a) è strettamente convesso ,
- b) differenziabile secondo Gateaux ,
- c) coercitivo ,
- d) semicontinuo inferiormente .

Dim. Le proprietà a) , b) , c) sono di facile verifica . Per provare la proprietà d) è sufficiente dimostrare che $u_n \rightarrow u$ in $L^2(0, T) \Rightarrow y_{u_n}(x, t) \rightarrow y_u$ in $L^2(\Omega \times [0, T])$.

Dalla (1.3) si trae :

$$\|y_{u_n} - y_u\|_{L^2(\Omega \times [0, T])} \leq k \|g_{u_n} - g_u\|_{L^2(\Omega \times [0, T])}$$

d'altra parte per la (1.17) esistono le costanti k' e k'' tali che

$$\|g_{u_n} - g_u\|_{L^2(\Omega \times [0, T])} \leq k' \|v_n - v\|_{H^1(0, T)} \leq k'' \|u_n - u\|_{L^2(0, T)}$$

e di qui l'asserto .

Dal Lemma 2.1 segue il

Teorema 2.1 - Nelle ipotesi a) , b) , $\gamma)$ esiste un'unico controllo ottimale $\tilde{u} \in L^2(0, T; R^k)$. Condizione necessaria e sufficiente affinché $\tilde{u}$ sia il controllo ottimale è che risulti:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} K_1(t, x, \xi) (y_u(x, t) - y_{\tilde{u}}(x, t)) y_{\tilde{u}}(\xi, t) dx d\xi dt + \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} K_2(x, \xi) (y_u(x, T) - y_{\tilde{u}}(x, T)) y_{\tilde{u}}(\xi, T) dx d\xi + \int_0^T \langle G_1(t) \tilde{u}(t) , u(t) - \tilde{u}(t) \rangle dt + \\ & + \int_0^T \langle G_2(t) \tilde{z}_{\tilde{u}}(t) , z_u(t) - z_{\tilde{u}}(t) \rangle dt + \langle G_3 \tilde{z}_{\tilde{u}}(T) , z_u(T) - z_{\tilde{u}}(T) \rangle = 0 \end{aligned}$$

$$\forall u \in L^2(0, T; R^k) .$$

Dim. L'esistenza e l'unicità del controllo ottimale segue dai risultati contenuti in [4] tenuto conto che per il Lemma 2.1 il funzionale $J(u)$ verifica le proprietà a) , c) , d) . La (2.2) sussiste in virtù delle proprietà a) , b) del Lemma 2.1 e si ottiene con un semplice calcolo annullando la derivata di $J(u)$.

5 - Una rappresentazione del controllo ottimale.

Nelle ipotesi $\alpha^1, \beta^1, \gamma^1$, poniamo:

$$(3.1) \quad f(x, t) = - \int_{\Omega} K_1(t, x, \xi) y_{\bar{u}}(\xi, t) d\xi \quad ; \quad p_T(x) = - \int_{\Omega} K_2(x, \xi) y_{\bar{u}}(\xi, T) d\xi$$

e consideriamo il problema al contorno:

$$(3.2) \quad \begin{cases} -\partial_t p = Lp + f(x, t) & \text{su } \Omega \times [0, T[\\ p(x, T) = p_T(x) \\ \partial_{x_n}^{j-1} p(x', 0, t) = 0 & j = 1, \dots, m \quad ; \quad x = (x', x_n) \in \Omega. \end{cases}$$

Poichè $\bar{u} \in L^2(0, T; R^k)$, per quanto visto nel n. 2, risulta $y_{\bar{u}} \in C^1([0, T]; L^2(\Omega))$. Quindi per le (3.1) risulta $f \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$, $p_T \in H^{2m}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$ e il problema (3.2) ammette un'unica soluzione $p_{\bar{u}} \in C^1([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C^0([0, T]; H^{2m}(\Omega))$.

Considerati, allora, gli operatori differenziali di ordine $2m-1$:

$$Q_j(x', \partial_{x'}) = \sum_{|\alpha|=m} (-1)^{m-j} \partial_{x'}^{\alpha-j} a_{\alpha}(x', 0) \partial_{x'}^{\alpha} \quad j = 1, \dots, m$$

e posto:

$$(3.3) \quad w_j(x', t) = e^{-|x'|^2} Q_j(x', \partial_{x'}) p_{\bar{u}}(x', 0, t) \quad j = 1, \dots, m$$

risulta $w_j(x', t) \in C^0([0, T]; H^1(R^{n-1})) \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}$. Conseguentemente, posto ancora:

$$(3.4) \quad w_j(t) = (-1)^j \int_{R^{n-1}} w_j(x', t) dx' \quad ; \quad w(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ \dots \\ w_m(t) \end{pmatrix}$$

si ha che $w(t) \in C^0([0, T]; R^m)$ e il problema di Cauchy:

$$(3.5) \quad \begin{cases} \psi' = -A^*(t)\psi + C^* \int_T^t w(\tau) d\tau + G_2(t) z_{\bar{u}}(t) \\ \psi(T) = -G_3 z_{\bar{u}}(T) \end{cases}$$

dove A^* e C^* sono le matrici trasposte di A e C , ammette un'unica soluzione $\psi_{\bar{u}} \in H^1(0, T; R^l)$. La coppia $(p_{\bar{u}}, \psi_{\bar{u}})$ così introdotta è lo stato aggiunto di $(y_{\bar{u}}, z_{\bar{u}})$ ed è definita come soluzione del sistema (3.2), (3.5).

Ciò premesso, sussiste la seguente caratterizzazione del controllo ottimale

Teorema 3.1 - Nella ipotesi $\alpha^1, \beta^1, \gamma^1$ il controllo ottimale $\bar{u} \in C^0([0, T])$ e ammette la rappresentazione:

$$(3.6) \quad \bar{u}(t) = G_1^{-1}(t) B^*(t) \psi_{\bar{u}}(t)$$

Dim. Osserviamo che, se $p \in C^1([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C^0([0, T]; H^{2m}(\Omega))$ e se $\partial_{x_n}^{j-1} p(x', 0, t) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m$

risulta:

$$\int_0^T \int_{\Omega} (p(\partial_t - L)y + y(\partial_t + L)p) dx dt = \int_{\Omega} (p(x, T)y(x, T) - p(x, 0)y(x, 0)) dx - \\ - \sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} \int_0^T dt \int_{R^{n-1}x_n} \partial_x^{j-1} y(x', 0, t) Q_j(x', \partial_x) p(x', 0, t) dx'.$$

Applicando tale formula alla coppia $(p_{\tilde{u}}, y_u - y_{\tilde{u}})$, tenuto conto delle (3.1), (3.3) e (3.4), si ha:

$$\int_0^T \int_0^T \int_{\Omega} K_1(t, x, \xi) (y_u(x, t) - y_{\tilde{u}}(x, t)) y_{\tilde{u}}(\xi, t) dx d\xi dt = \\ = - \int_0^T \int_{\Omega} K_2(x, \xi) (y_u(x, T) - y_{\tilde{u}}(x, T)) y_{\tilde{u}}(\xi, T) dx d\xi + \sum_{j=1}^m \int_0^T (v_j(t, u) - v_j(t, \tilde{u})) w_j(t) dt.$$

Conseguentemente per la (2.2) risulta:

$$\sum_{j=1}^m \int_0^T (v_j(t, u) - v_j(t, \tilde{u})) w_j(t) dt + \int_0^T \langle G_1(t) \tilde{u}(t), u(t) - \tilde{u}(t) \rangle dt + \\ + \int_0^T \langle G_2(t) z_{\tilde{u}}(t), z_u(t) - z_{\tilde{u}}(t) \rangle dt + \langle G_3 z_{\tilde{u}}(T), z_u(T) - z_{\tilde{u}}(T) \rangle = 0$$

cioè anche:

$$(3.7) \quad \int_0^T \langle v_u(t) - v_{\tilde{u}}(t), w(t) \rangle dt + \int_0^T \langle G_1(t) \tilde{u}(t), u(t) - \tilde{u}(t) \rangle dt + \\ + \int_0^T \langle G_2(t) z_{\tilde{u}}(t), z_u(t) - z_{\tilde{u}}(t) \rangle dt + \langle G_3 z_{\tilde{u}}(T), z_u(T) - z_{\tilde{u}}(T) \rangle = 0.$$

D'altra parte si verifica facilmente che:

$$\int_0^T \langle v_u(t) - v_{\tilde{u}}(t), w(t) \rangle dt = \int_0^T \langle u(s) - \tilde{u}(s), B^*(s) \int_s^T C^* w(t) dt \int_s^t \Phi^*(\tau, s) d\tau \rangle ds; \\ \int_0^T \langle G_2(t) z_{\tilde{u}}(t), z_u(t) - z_{\tilde{u}}(t) \rangle dt = \int_0^T \langle u(s) - \tilde{u}(s), B^*(s) \int_s^T \Phi^*(t, s) G_2(t) z_{\tilde{u}}(t) dt \rangle ds; \\ \langle G_3 z_{\tilde{u}}(T), z_u(T) - z_{\tilde{u}}(T) \rangle = \int_0^T \langle u(s) - \tilde{u}(s), B^*(s) \Phi^*(T, s) G_3 z_{\tilde{u}}(T) \rangle ds;$$

per cui la (3.7) si può anche scrivere nella forma:

$$\int_0^T \langle u(s) - \tilde{u}(s), G_1(s) \tilde{u}(s) - B^*(s) (\int_T^s C^* w(t) \int_s^t \Phi^*(\tau, s) d\tau + \Phi^*(t, s) G_2(t) z_{\tilde{u}}(t)) dt - \\ - \Phi^*(T, s) G_3 z_{\tilde{u}}(T)) \rangle ds = 0.$$

Posto allora:

$$\psi(s) = \int_T^s (C^* w(t) \int_s^t \Phi^*(\tau, s) d\tau + \Phi^*(t, s) G_2(t) z_{\tilde{u}}(t)) dt - \Phi^*(T, s) G_3 z_{\tilde{u}}(T)$$

risulta:

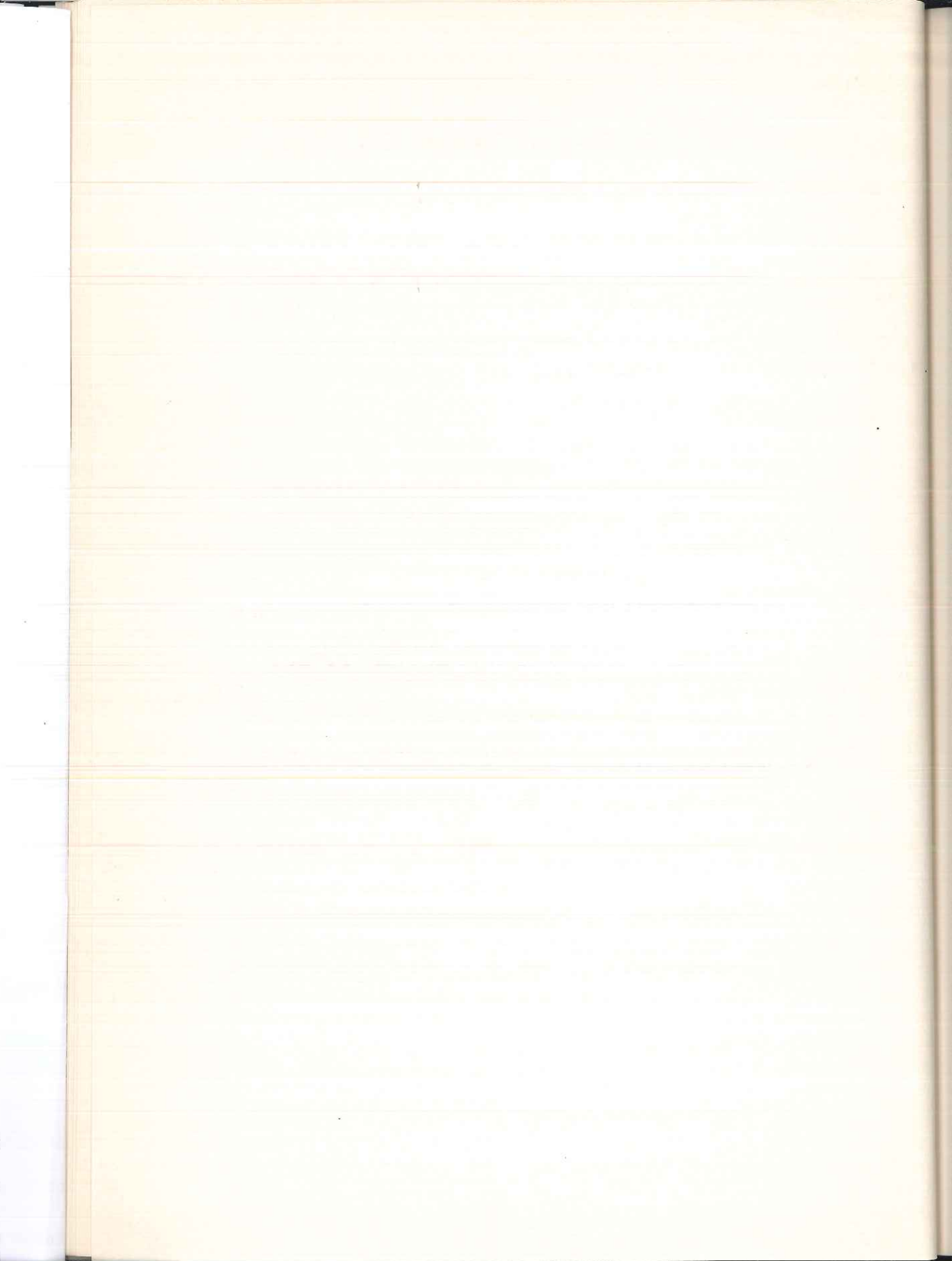
$$\int_0^T \langle u(s) - \tilde{u}(s), G_1(s)\tilde{u}(s) - B^*(s)\psi(s) \rangle ds = 0$$

e dall'arbitrarietà di u segue la (3.6); da (3.6) e dalle ipotesi si deduce che $\tilde{u} \in C^0([0, T])$.

Osservazione- Dal teorema 3.1 risulta $z_u \in C^1([0, T])$; pertanto se supponiamo $G_1 \in C^1([0, T])$ e $G_2 \in C^0([0, T])$ risulta $\psi \in C^1([0, T])$ e quindi, per la (3.6), $\tilde{u} \in C^1([0, T])$; inoltre se $A \in C^1([0, T])$, $B \in C^2([0, T])$, $G_1 \in C^2([0, T])$ e $G_2 \in C^1([0, T])$ allora $\psi \in C^2([0, T])$ e quindi anche $\tilde{u}$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. Giurgiu, *A feedback solution of a linear quadratic problem for boundary control of heat equation*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., Tome XX, Bucarest, 1975.
- [2] R. Conti, *Problemi di controllo e di controllo ottimale*, Utet, 1974.
- [3] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, N.Y., 1974.
- [4] J.L. Lions, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod Gauthier-Villars, 1968.
- [5] M. D'Ilorio, R. Toscano, *Su un problema di controllo ottimale legato all'operatore biarmonico*, Rend. Acc. Sc. Fis. Mat., Serie IV, Vol. XLVIII, Anno CXX (1980-81).
- [6] A.M. Forenza, S. Giuga, *Un problema di controllo ai limiti per l'equazione delle corde vibranti*, In corso di stampa su La Ricerca, ESA.
- [7] S. Giuga, *Su una soluzione feedback in un problema di controllo per l'equazione delle corde vibranti*, In corso di stampa su La Ricerca, ESA.



UN TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITA' PER ALCUNE EQUAZIONI
ELLITTICO PARABOLICHE DEL IV ORDINE

Nota di Vincenzo Esposito
Presentata dal Socio Ordinario Carlo Ciliberto
Adunanza del 16 novembre 1985

Abstract.- A theorem of existence and uniqueness of a classical solution of the Dirichlet problem for the equations $\sum_l (a_l D_{t_l}^4 + b_l D_{t_l}^2) u + cu = f$, $a_l \geq 0$, $b_l < 0$ is obtained

Riassunto.- Si stabilisce un teorema di esistenza e unicità di una soluzione classica del problema del tipo di Dirichlet relativo all'equazioni:

$$\sum_l (a_l D_{t_l}^4 + b_l D_{t_l}^2) u + cu = f, \quad a_l \geq 0, \quad b_l < 0.$$

In un recente lavoro [1] ho studiato il problema omogeneo del tipo di Dirichlet in un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ relativo ad equazioni ellittico paraboliche con coefficienti $C^\infty(\bar{\Omega})$ del IV ordine della forma:

$$(I) \quad Lu = \sum_l (a_l(t) D_{t_l}^4 u + b_l(t) D_{t_l}^2 u) + cu = f, \quad a_l \geq 0, \quad b_l < 0,$$

stabilendo delle stime a priori di tipo globale per le soluzioni regolari del problema in questione. Detti risultati vengono stabiliti senza alcuna limitazione circa il "modo di degenerare" in Ω ; invece per quanto concerne il comportamento sulla frontiera Σ di Ω , si richiede che la porzione Σ_3 di Σ in cui risulta $a = \sum_l a_l \nu_l^4 > 0$ (ν essendo la normale esterna a Σ) abbia chiusura disgiunta dalla rimanente parte di Σ in cui L degenera (quindi se quest'ultima non è vuota, Ω deve risultare necessariamente a più contorni).

In questa nota, utilizzando i risultati di [1], nell'ordine di idee di Kohn-Nirenberg [2], provo un teorema di esistenza e unicità di una soluzione classica del problema del tipo di Dirichlet relativo ad equazioni ellittico paraboliche del tipo (I), in condizioni di sufficiente regolarità per f ; in detto teorema le ipotesi sulla parte degenera di Σ sono meno generali di quelle assunte in [1], in quanto qui viene richiesto che la parte $\Sigma_1 = \{t \in \Sigma : a = 0, \frac{da}{d\nu} = 0\}$ di Σ sia a sua volta digiunta dalla chiusura della parte $\Sigma_2 = \{t \in \Sigma : a = 0, \frac{da}{d\nu} > 0\}$.

7. Posizione del problema ed enunciato del risultato.

Sia :

$$Lu = \sum_{\ell} (a_{\ell} D_{t_{\ell}}^4 u + b_{\ell} D_{t_{\ell}}^2 u) + cu = f, \quad a_{\ell} \geq 0, \quad b_{\ell} < 0,$$

un'equazione ellittico parabolica del tipo (I), in un aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con frontiera sufficientemente regolare. Supponiamo che i coefficienti siano di classe $C^{\infty}(\bar{\Omega})$. Indichiamo con Σ la frontiera di Ω e con ν_i il coseno direttore iesimo della normale esterna ν a Σ ; denotiamo inoltre con Σ_1 la parte di Σ su cui $a = \sum_{\ell} a_{\ell} \nu_{\ell}^4 = 0$ e $\frac{da}{d\nu} = 0$, Σ_2 la parte di Σ su cui $a = 0$ e $\frac{da}{d\nu} \neq 0$, Σ_3 la parte di Σ su cui $a > 0$.

Supponiamo verificate le condizioni :

- (i) $-b_{\ell} \geq \lambda > 0 \quad \forall \ell \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad 2c + \sum_{\ell} (D_{t_{\ell}}^4 a_{\ell} + D_{t_{\ell}}^2 b_{\ell}) \geq \lambda_0 > 0.$
- (ii) $\nu_{\ell} \neq 0 \quad \forall \ell \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \text{q. o. su } \Sigma_1 \cup \Sigma_2.$
- (iii) $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$, siano a due a due disgiunte.

Ciò premesso consideriamo il problema al contorno :

$$(P) \quad \begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega & f \in W^N(\Omega) \\ u|_{\Sigma} = 0 & \frac{du}{d\nu} \Big|_{\Sigma_2 \cup \Sigma_3} = 0 & u \in W^{N'}(\Omega) \quad (N' \geq 4) \end{cases}$$

dove N e N' sono interi e $W^N(\Omega)$ denota l'ordinario spazio di Sobolev di ordine N . Detto ora $\left[\frac{N}{2}\right]$ la parte intera di $\frac{N}{2}$, in questa nota proveremo il seguente:

TEOREMA I. *Nelle condizioni (i), (ii), (iii), per $N \geq 5$, esiste un numero positivo $\bar{\lambda}$ tale che per $\lambda > \bar{\lambda}$ il problema (P) ammette una ed una sola soluzione*

$$u \in W^{\left[\frac{N+3}{2}\right]}(\Omega)$$

Tale soluzione è poi di classe $W^{(N+2)}$ in $\Omega - I_1$, essendo I_1 un prefissato intorno di Σ_1 .

La dimostrazione di tale teorema sarà così articolata : nel paragrafo 2. perturberemo L con un operatore differenziale lineare del tipo $\gamma(L' + L'')$ dove γ è un parametro positivo, L' è un opportuno operatore differenziale del terzo ordine, i cui coefficienti hanno il supporto in un intorno di Σ_1 , L'' è del IV ordine e ellittico in $\Omega \cup \Sigma_3$. Utilizzando le tecniche

di (1) proveremo che per u soluzione del problema al contorno :

$$(P') \quad \begin{cases} (L + \gamma(L' + L''))u = f & f \in W^N(\Omega) \\ u|_{\Sigma} = 0 \quad \frac{du}{dv} \Big|_{\Sigma_3 \cup \Sigma_2} = 0 \end{cases}$$

valgono le seguenti stime a priori :

$$(1.1) \quad \|u, \Omega\|_{\left[\frac{N+1}{2}\right]} + \|u, \Omega - I_1\|_N \leq K \|f\|_{N-2}$$

dove $\|u, \Omega\|_N \equiv \|u\|_{W^N(\Omega)}$ e dove I_1 è un prefissato intorno di Σ_1 .

Nel paragrafo 3. intorno a $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ perturberemo ulteriormente L con un operatore ellittico $\varepsilon L'''$ d'ordine $2N$, e per il problema al contorno :

$$(P'') \quad \begin{cases} (L + \gamma(L' + L'') + \varepsilon L''')u = f & f \in W^N(\Omega) \\ u|_{\Sigma} = 0, \quad \frac{du}{dv} \Big|_{\Sigma_3 \cup \Sigma_2} = 0 \\ \frac{d^i u}{dv^i} \Big|_{\Sigma_1} = 0 \quad i=N, \dots, 2N-2, \quad \frac{d^i u}{dv^i} \Big|_{\Sigma_2} = 0 \quad i=N, \dots, 2N-3, \end{cases}$$

stabiliremo le seguenti stime a priori :

$$(1.2) \quad \|u, I_1 \cup I_2\|_N \leq K_Y \|f\|_{N-2}$$

con K_Y costante dipendente da γ, I_1 e I_2 opportuni intorni rispettivamente di Σ_1 e Σ_2 .

Nel paragrafo 4., con l'ausilio delle maggiorazioni (1.1) e (1.2), proveremo il Teorema I.

2. Stime a priori per le soluzioni del problema (P')

Indichiamo con L' l'operatore differenziale del terzo ordine così definito:

$$L' = \sum_{\ell=1}^n d_{\ell} D_{t_{\ell}} \quad , \quad d_{\ell} \in C^{\infty}(\bar{\Omega}) \quad , \quad (\text{supp } d_{\ell}) \cap (\Sigma_2 \cup \Sigma_3) = \emptyset \quad , \quad \text{supp } d_{\ell} \supset I_1 \quad ,$$

essendo I_1 un intorno di Σ_1 di spessore sufficientemente piccolo, inoltre i coefficienti d_ℓ verificano la condizione: $d = \sum_\ell d_\ell v_\ell^2 = -1$ in I_1 .

Poniamo: $L'' = \bar{a} \sum_{\ell=1}^3 D_{t_\ell}^4$, $\bar{a} \in C(\bar{\Omega})$, $\bar{a} > 0$ in $\Omega \cup \Sigma_3$, $\bar{a}|_{\Sigma_1 \cup \Sigma_2} = 0$,
 $\left. \frac{d\bar{a}}{dv} \right|_{\Sigma_1} = 0$.

Ciò premesso, poniamo: $L_\gamma = L + \gamma(L' + L'')$. Incominciamo con l'osservare, che se u e v sono due funzioni sufficientemente regolari e verificanti le condizioni al bordo del problema (P') si ha:

$$\begin{aligned} (2.1) \quad (L_\gamma u, v) &= \sum_\ell \int_\Omega a_\ell D_{t_\ell}^2 u D_{t_\ell}^2 v + D_{t_\ell}^2 a_\ell (D_{t_\ell}^2 u D_{t_\ell} v - D_{t_\ell}^2 v D_{t_\ell} u) dv + \\ &\sum_\ell \int_\Omega (-b_\ell - 2D_{t_\ell}^2 a_\ell) D_{t_\ell} u D_{t_\ell} v - \frac{1}{2} (D_{t_\ell}^3 a_\ell + D_{t_\ell} b_\ell) (D_{t_\ell} u v - D_{t_\ell} v u) dv + \\ &+ \frac{1}{2} \int_\Omega 2c + \sum_\ell (D_{t_\ell}^4 a_\ell + D_{t_\ell}^2 b_\ell) u v dv + \\ &+ \gamma \left(\sum_\ell \int_\Omega \bar{a} D_{t_\ell}^2 u D_{t_\ell}^2 v + (D_{t_\ell} \bar{a} - \frac{1}{2} d_\ell) (D_{t_\ell}^2 u D_{t_\ell} v - D_{t_\ell}^2 v D_{t_\ell} u) dv + \right. \\ &+ \sum_\ell \int_\Omega (\frac{3}{2} D_{t_\ell} d_\ell - 2D_{t_\ell}^2 \bar{a}_\ell) D_{t_\ell} u D_{t_\ell} v - \frac{1}{2} (D_{t_\ell}^3 \bar{a}_\ell - D_{t_\ell}^2 d_\ell) (D_{t_\ell} u v - D_{t_\ell} v u) dv + \\ &\left. + \sum_\ell \int_\Omega (\frac{1}{2} D_{t_\ell}^4 \bar{a}_\ell - D_{t_\ell}^2 d_\ell) u v dv - \int_{\Sigma_1} d \left(\frac{du}{dv} \frac{dv}{dv} \right) ds \right) = Q(u, v) + \gamma Q'(u, v), \end{aligned}$$

dove dv rappresenta l'elemento di volume di Ω e ds l'elemento di superficie di Σ .

Da ciò traiamo che, se $0 < \gamma < 1$, esiste una costante C che dipende dai coefficienti della parte principale di L edalle loro derivate fino al IV ordine, tale che se $u \in W_{loc}^4(\Omega) \cap W^2(\Omega)$, per $\lambda > C$, dalla (2.1) risulta:

$$(2.2) \quad (L_\gamma u, u) \geq K \|u\|_1;$$

dalla (2.2) se u è soluzione del problema (P') si ha:

$$(2.3) \quad \|u\|_1 \leq K \|f\|,$$

con K costante .

Introduciamo in un intorno I' della frontiera Σ di spessore sufficientemente piccolo un sistema di coordinate locali (x, y) (cfr. {1} e {2}) dove $-y$ è la distanza del generico punto di I' da Σ ; indichiamo con $D^{\alpha, k} u$ la derivata d'ordine $|\alpha| + k$ cioè :

$$D^{\alpha, k} u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \right)^{\alpha_{n-1}} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^k .$$

Per ogni I aperto $\subset I'$, porremo :

$$|||u, I|||_N^2 = \sum_{\substack{|\alpha|+k \leq N \\ k \leq 1}} \int_I (D^{\alpha, k} u)^2 dv + \sum_{\substack{|\alpha|+k \leq N \\ k \geq 2}} \int_I |y|^{k-1} (D^{\alpha, k} u)^2 dv$$

Ciò posto, ragionando come nelle dimostrazioni delle proposizioni (3.1) e (4.1) di {1} si ricava che per ogni $N \geq 4$ esiste $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^+$ tale che per $\lambda > \bar{\lambda}$ e per ogni $u \in W^{N+3}(\Omega)$ soluzione del problema (P) vale la disuguaglianza :

$$(2.4) \quad \lambda |||u, \Omega - I_1|||_N^2 \leq C |||u, \Omega|||_N^2 + K ||f||_{N-2}^2$$

dove $I_1 \subset I'$ è un prefissato intorno di Σ_1 ; $\Omega' \supset \Omega - I_1$ e $\Omega' \cap \Sigma_1 = \emptyset$.

Analogamente, seguendo i ragionamenti della proposizione (4.1) di {1}, nel caso in cui Σ_1 è disgiunta da Σ_2 , si ricava la disuguaglianza :

$$(2.5) \quad \lambda |||u, I_1|||_N^2 \leq C |||u, I_1|||_N^2 + K ||f||_{N-2}^2$$

dove $I_1' \supset I_1$;

infatti, tenendo presente che $a(x, y) + \bar{a}(x, y)$ su Σ_1 si annulla , le disuguaglianze dei lemmi (2.2) e (4.2) di {1} si hanno rispettivamente nella forma :

$$(2.6) \quad \lambda \sum_{\substack{|\alpha|+k \leq N \\ k \leq 1}} |D^{\alpha, k} u|^2 - \gamma \int_{\Sigma_1} d(D^{\alpha, 1} u)^2 \zeta^2 dx \leq C \sum_{\substack{|\alpha|+k \leq N \\ k \leq 2}} |\zeta_1| y|^{\frac{k-1}{2}} |D^{\alpha, k} u|^2 +$$

$$+ C_\lambda \sum_{\substack{|\alpha|+k \leq N-1 \\ k \geq 2}} |\zeta_1| y|^{\frac{k-1}{2}} |D^{\alpha, k} u|^2 + K ||f||_{N-2}^2 ,$$

$$(2.7) \quad -(D^{\beta, h-2} L_\gamma u, \zeta^2 |y|^{\frac{h-1}{2}} D^{\beta, h} u) \geq \lambda ||q\gamma||^{\frac{h-1}{2}} |D^{\beta, h} u|^2 - C \sum_{|\alpha|+k \leq N} |\zeta_1| y|^{\frac{k-1}{2}} |D^{\alpha, k} u|^2$$

$$= (h-1) \gamma(d(x,0) \zeta^2 |y|^{h-2} D^{\beta,h} u, D^{\beta,h} u) = C_\lambda \sum_{|\alpha|+k \leq N-1} ||\zeta_1 |y|^{\frac{k-1}{2}} D^{\alpha,k} u||^2 ,$$

con $|\beta| + h \leq N$, $h \geq 2$,

dove ζ e ζ_1 sono funzioni $C^\infty(\bar{\Omega})$ i cui supporti sono contenuti in I' e C_λ è una costante che dipende da λ .

Ora poichè d su Σ_1 è minore di zero, procedendo come nella dimostrazione della proposizione (4.1) di [1], sostituendo alle stime dei lemmi (2.2) e (4.2) rispettivamente le (2.6) e (2.7) si ha la (2.5).

Dalle (2.4) e (2.5) si deduce la seguente: (cfr. dimostrazione del Teorema I di [1])

PROPOSIZIONE (2.1). *Nelle condizioni (i) e (iii), fissato un intorno I_1 di Σ_1 , per $N \geq 4$, esiste $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^+$ tale che per ogni $u \in W^{N+3}(\Omega)$ soluzione del problema (P') , per $\lambda > \bar{\lambda}$ risulta:*

$$(2.8) \quad ||u, \Omega||_{\left[\frac{N+1}{2}\right]} + ||u, \Omega - I_1||_N \leq K ||f||_{N-2} .$$

3. Stime a priori per le soluzioni del problema (P'')

Indichiamo qui come nel seguito con I'_1 e I'_2 due intorni rispettivamente di Σ_1 e di Σ_2 di spessore δ_1^i e δ_2^i e tali che $I'_1 \cap I'_2 = \emptyset$.

Denotiamo poi con $\rho_1(y)$ e $\rho_2(y)$ due funzioni di $C^\infty(\bar{\Omega})$:

$0 \leq \rho_i(y) \leq 1$, $\rho_i(0) = 1$, $\text{supp } \rho_i = I'_i$, $(\rho_i)_y = -1$ in un intorno $I''_i \subset I'_i$ di Σ_i , con $i = 1, 2$.

Infine indichiamo con (cfr. [2] pag. 828):

$$G_i[u, v] = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq N} G_i^{\alpha, \beta}(x) D^{\alpha, 0} u D^{\beta, 0} v \quad (i=1, 2)$$

due forme bilineari simmetriche con coefficienti C^∞ definite rispettivamente su Σ_1 e Σ_2 e che verificano le disuguaglianze:

$$(3.1) \quad G_i[u, u] \geq \sum_{|\alpha| \leq N} |D^{\alpha, 0} u|^2 \quad (i=1, 2) .$$

Prolungate queste rispettivamente in un intorno di Σ_1 e di Σ_2 poniamo :

$$(3.2) \quad Q_i(u, v) = \int_{\Omega} ((D_Y^N u \cdot D_Y^N v) + G_i u, v) \rho_i(y) dv \quad (i=1, 2);$$

$$(3.3) \quad Q_{Y, \varepsilon}(u, v) = Q_Y(u, v) + \varepsilon(Q_1(u, v) + Q_2(u, v)).$$

Osserviamo, ora che l'ultimo integrale della (2.1) si può scrivere :

$$\int_{\Sigma_1} d D_Y u \cdot D_Y v ds = \sum_l \int_{\Omega} D_{t_l} (g \cdot d_l D_{t_l} u \cdot D_{t_l} v) dv$$

dove g è una funzione di $C_0^\infty(\Omega \cup \Sigma_1)$ e $g=1$ su Σ_1 .

Evidentemente $Q_{Y, \varepsilon}(u, v)$ risulta una forma bilineare nell'insieme delle funzioni di classe $C^\infty(\Omega)$ che verificano le condizioni al bordo del problema (P).

Indichiamo con $H_{Y, \varepsilon}(\Omega)$ il completamento di tale classe di funzioni rispetto alla norma : $(Q_{Y, \varepsilon}(u, u))^{1/2}$, e consideriamo l'equazione nell'incognita u :

$$(3.4) \quad Q_{Y, \varepsilon}(u, v) = (f, v) \quad f \in W^{N-2}(\Omega) \quad (N \geq 2).$$

Evidentemente se $u \in H_{Y, \varepsilon}(\Omega)$ è soluzione della (3.4), risulta :

$$(3.5) \quad \|u, \Omega\|_1 \leq K \|f\|,$$

$$(3.6) \quad \varepsilon \|u, I_1\|_N \leq K \|f\|, \quad \varepsilon \|u, I_2\|_N \leq K \|f\|$$

$$(3.7) \quad \gamma \|u, \Omega - (I_1 \cup I_2)\|_2 \leq K \|f\| \quad \forall I_1 \subset I_1' \quad \text{e} \quad \forall I_2 \subset I_2'$$

Indichiamo ora con $I_1'' \subset I_1'$ e $I_2'' \subset I_2'$ due intorni rispettivamente di Σ_1 e Σ_2 di spessore δ_1'' e δ_2'' nei quali risulti : $\rho_1 \geq \frac{1}{2}$ e $(\rho_i)_Y = -1$ in I_i'' ($i=1, 2$).

Ciò premesso proveremo la seguente proposizione :

PROPOSIZIONE (3.1) Nelle condizioni (i), (ii) e (iii) esiste un intorno $I_1' \subset I_1''$ di Σ_1 ed un intorno $I_2' \subset I_2''$ di Σ_2 ed esiste un numero positivo $\bar{\lambda}$ tale che, per ogni $u \in C^\infty(I_1' \cup I_2') \cap H_{Y, \varepsilon}(\Omega)$ soluzione dell'equazione (3.4), che verifichi le condizioni al bordo del problema (P''), per $\lambda > \bar{\lambda}$ vale la disuguaglianza:

$$(3.8) \quad ||u, I_1||_N + ||u, I_2||_N \leq K_Y ||f||_{N-2} \quad (N \geq 2)$$

con K costante dipendente da γ .

Allo scopo di dimostrare la suddetta proposizione premettiamo alcuni lemmi.
Per ogni intorno $I_1 \subset I_1''$ di E_1 di spessore δ_1 e per ogni intorno $I_2 \subset I_2''$ di E_2 di spessore δ_2 , poniamo:

$$A_1 = I_1'' - I_1, \quad A_2 = I_2'' - I_2.$$

Ciò posto proviamo il seguente:

LEMMA (3.1) Per ogni $u \in C^\infty(I_1' \cup I_2') \cap H_{\gamma, \epsilon}(\Omega)$ soluzione dell'equazione (3.4) valgono le disuguaglianze:

$$(3.9) \quad ||u, A_1||_{N+1}^2 + \epsilon ||u, A_1||_{2N-1}^2 \leq K_Y ||f||_{N-3}^2 \quad (N \geq 3)$$

$$(3.10) \quad ||u, A_2||_{N+1}^2 + \epsilon ||u, A_2||_{2N-1}^2 \leq K_Y ||f||_{N-3}^2$$

Dim. Proviamo prima la (3.9). Sia $P=(x_0, 0)$ un punto di E_1 e sia A_1' un aperto di I_1' esprimibile in coordinate locali del tipo:

$$A_1' = \{(x, y) \in I_1' : |x - x_0| \leq h, \frac{1}{2}\delta < -y\}.$$

Indichiamo con $\zeta \in C^\infty(\Omega)$ una funzione con supporto contenuto in A_1' , $\zeta = 1$ in $A_1 \cap A_1'$, $0 \leq \zeta \leq 1$.

Poichè $Q_Y(u, v)$ è ellittico in A_1^* possiamo applicare ad esso il lemma (8.1) di (2).

Posto $v = \zeta^{2(2N-1)} \sum_{|\alpha|=2(N-1)} D^\alpha u$, $r=N-2$ e $k=N-1$, dal citato lemma si ha:

$$(3.11) \quad Q_Y(u, \zeta^{2(2N-1)} \sum_{|\alpha|=2(N-1)} D^\alpha u) \geq -k_Y' ||\zeta^{N-2} u||^2 +$$

$$+ k_Y'' \sum_{|\alpha| \leq N+1} ||\zeta^{N-2+|\alpha|} D^\alpha u||^2$$

Applichiamo poi il lemma a $Q_1(u, v)$ con $r=0$ e $k=N-1$, si ha:

$$(3.12) \quad Q_1(u, \zeta^{2(2N-1)} \sum_{|\alpha|=2(N-1)} D^\alpha u) \geq -k' \|u\|^2 + k'' \sum_{|\alpha| \leq 2N-1} \|\zeta^\alpha D^\alpha u\|^2.$$

Dalle (3.11), (3.12) e (3.5) si deduce :

$$(3.13) \quad \sum_{|\alpha| \leq N+1} \|\zeta^{N-2+|\alpha|} D^\alpha u\|^2 + \varepsilon \sum_{|\alpha| \leq 2N-1} \|\zeta^{|\alpha|} D^\alpha u\|^2 \leq K_Y \|f\|^2 + \\ + \|(f, \zeta^{2(2N-1)} \sum_{|\alpha| \leq 2N-2} D^\alpha u)\|.$$

Dalla (3.13), integrando per parti, poichè $0 \leq \zeta \leq 1$, segue facilmente la disuguaglianza (3.9).

Con ragionamenti analoghi si prova la (3.10).

LEMMA (3.2) Nelle condizioni (i) e (iii) esista $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^+$ tale che, per ogni $u \in C^\infty(I_1' \cup I_1'') \cap H_{Y, \varepsilon}$ soluzione dell'equazione (3.4) che verifichi le condizioni al bordo del problema (P''), per $\lambda > \bar{\lambda}$ valgono le disuguaglianze :

$$(3.14) \quad \lambda \sum_{\substack{|\alpha|+k=N \\ k \leq 1}} \|D^{\alpha, k} u, I_1\|^2 + \varepsilon \left(\sum_{|\alpha|=N-1} \|D^{\alpha, N} u, I_1\|^2 + \sum_{|\alpha|=2N-1} \|D^{\alpha, 0} u, I_1\|^2 \right) \leq \\ \leq C \sum_{\substack{|\alpha|+k \leq N \\ k \leq 3}} \| |y|^{\frac{k-1}{2}} D^{\alpha, k} u, I_1 \|^2 + K_Y \|f\|_{N-2}^2 \quad (I_1 \subset I_1'')$$

$$(3.15) \quad \lambda \sum_{\substack{|\alpha|+k=N \\ k \leq 1}} \|D^{\alpha, k} u, I_2\|^2 + \varepsilon \left(\sum_{|\alpha|=N-1} \|D^{\alpha, N} u, I_2\|^2 + \sum_{|\alpha|=2N-1} \|D^{\alpha, 0} u, I_2\|^2 \right) \leq \\ \leq C \sum_{\substack{|\alpha|+k \leq N \\ k \leq 2}} \|D^{\alpha, k} u, I_2\|^2 + K_Y \|f\|_{N-2}^2 \quad (I_2 \subset I_2'').$$

Dim. Sia $P=(x, 0)$ un punto di Σ_1 , fissato $I_1 \subset I_1''$, indichiamo con H_1 e H_1' due intorni di P esprimibili in coordinate locali del tipo :

$$(3.16) \quad H_1 = \{(x, y) \in I_1 : |x-x_0| < h\} \\ H_1' = \{(x, y) \in I_1'' : |x-x_0| < 2h\};$$

poniamo poi :

$$(3.17) \quad H_1'' = \{(x, y) \in H_1' : y > \delta_1 \text{ (}\delta_1 \text{ spessore di } I_1)\}.$$

Sia ζ una funzione $C^\infty(\bar{\Omega})$, $\text{supp } \zeta \subset H_1'$, $0 \leq \zeta \leq 1$, ζ indipendente da y per $y < \delta_1$, $\zeta = 1$ in H_1 . Poniamo nella (3.4) :

$$v = (-1)^{N-1} \sum_{|\alpha|=N-1} D^{\bar{\alpha}, 0} (\zeta^{2N} D^{\bar{\alpha}, 0} u) \quad |\bar{\alpha}| = N-1,$$

abbiamo :

$$(3.18) \quad Q_Y(u, v) = (-1)^{N-1} Q_Y(u, v) - \sum_{|\alpha|=N-1} Q_Y(\zeta^N D^{\bar{\alpha}, 0} u, D^{\bar{\alpha}, 0} u) + \\ + \sum_{|\alpha|=N-1} Q_Y(\zeta^N D^{\bar{\alpha}, 0} u, \zeta^N D^{\bar{\alpha}, 0} u) \geq - |(-1)^{N-1} Q_Y(u, v) - \sum_{|\alpha|=N-1} Q_Y(\zeta^N D^{\bar{\alpha}, 0} u, \zeta^N D^{\bar{\alpha}, 0} u)| \\ + \lambda \sum_{|\alpha|+k=1} ||D^{\alpha, k}(\zeta^N D^{\bar{\alpha}, 0} u)||^2 - c \sum_{|\alpha|+k=1} ||D^{\alpha, k}(\zeta^N D^{\bar{\alpha}, 0} u)||^2;$$

tramite integrazioni per parti, utilizzando il lemma (5.2) di [2], si ricava facilmente :

$$(3.19) \quad |(-1)^{N-1} Q_Y(u, v) - \sum_{|\alpha|=N-1} Q_Y(\zeta^N D^{\bar{\alpha}, 0} u, \zeta^N D^{\bar{\alpha}, 0} u)| \leq c \sum_{\substack{|\alpha|+k \leq N \\ k \leq 3}} ||y^{\frac{k-1}{2}} D^{\alpha, k} u_{, H_1'}||^2 + \\ + \gamma c \sum_{|\alpha|=N-2} ||D^{\alpha, 2} u_{, H_1'}|| ||D^{\alpha, 1} u_{, H_1'}|| + c_\lambda ||D^{0, 1} u_{, H_1'}||^2.$$

Dalle (3.18), (3.19) e dal lemma (3.1) si deduce :

$$(3.20) \quad Q_Y(u, v) \geq \lambda \sum_{\substack{|\alpha|+k \leq N \\ k \leq 1}} ||D^{\alpha, k} u_{, H_1'}||^2 - c \sum_{\substack{|\alpha|+k \leq N \\ k \leq 3}} ||y^{\frac{k-1}{2}} D^{\alpha, k} u_{, H_1'}||^2 - K_Y ||f||_{N-3}^2.$$

D'altra parte si ha :

$$(3.21) \quad \varepsilon Q_1(u, v) = \varepsilon (D^{0, N} u, D^{0, N} v)_{\rho_1} + \varepsilon \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq N} (G^{\alpha, \beta}(x) D^{\alpha, 0} u, D^{\beta, 0} v)_{\rho_1};$$

tramite integrazioni per parti si ricava :

$$(3.22) \quad (-1)^{N-1} \varepsilon (D^{0, N} u, D^{0, N} (D^{\bar{\alpha}, 0} \zeta^{2N} D^{\bar{\alpha}, 0} u)_{\rho_1}) \geq \varepsilon (\zeta^{2N} D^{\bar{\alpha}, N} u, D^{\bar{\alpha}, N} u)_{\rho_1} -$$

$$- \varepsilon K \left| (D^{\bar{\alpha}, N}_u, \left(\sum_{i=0}^n (D^{0, i}_{\zeta} {}^{2N} D^{\bar{\alpha}, N-i}_u) \rho_1 \right) \right| - \varepsilon K \sum_{|\alpha| < |\bar{\alpha}|} \left| (D^{\alpha, N}_u, \left(\sum_{i=0}^n (D^{0, i}_{\zeta} {}^{2N} D^{\bar{\alpha}, N-i}_u) \rho_1 \right) \right|$$

ora utilizzando il lemma (8.2) di {2}, poichè $0 \leq \zeta \leq 1$ e $1/2 \leq \rho_1 \leq 1$ e ζ è in dipendente da y per $|y| < \delta_1$, dalla (3.22) si ha :

$$(3.23) \quad (-1)^{N-1} (D^{0, N}_u, D^{0, N} (D^{\bar{\alpha}, 0} (\zeta {}^{2N} D^{\bar{\alpha}, 0}_u) \rho_1) \geq -\varepsilon K \sum_{\substack{|\alpha| \leq N-1 \\ k \leq N}} \|D^{\alpha, k}_u, H_1^u\|^2 -$$

$$- \varepsilon K \left| \zeta {}^N D^{\bar{\alpha}, N}_u \right| \sum_{|\alpha| \leq N-2} \left| \zeta {}^N D^{\alpha, N}_u \right| + \frac{1}{2} \varepsilon \left| \zeta {}^N D^{\bar{\alpha}, N}_u \right|^2 - \varepsilon K \left| D^{0, N}_u, I_1^u \right|^2 ;$$

dalle (3.23), (3.6), dal lemma (3.1) si deduce :

$$(3.24) \quad \varepsilon (D^{0, N}_u, D^{0, N}_v) \geq \frac{1}{4} \varepsilon \sum_{|\alpha| = N-1} \left| \zeta {}^N D^{\alpha, N}_u \rho_1 \right|^2 - K \|f\|_{N-3}^2 .$$

In maniera analoga si ricava :

$$(3.25) \quad \varepsilon \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq N} (G^{\alpha, \beta}(x) D^{\alpha, 0}_u, D^{\beta, 0}_v \rho_1) \geq \frac{1}{4} \varepsilon \sum_{|\alpha| = 2N-1} \left| \zeta {}^N D^{\alpha, 0}_u \right|^2 - K \|f\|_{N-3}^2 .$$

Dalle (3.20), (3.24), (3.25) e dalla (3.4) si deduce facilmente la (3.14) ,

La (3.15) si dimostra in maniera del tutto analoga alla (3.14) .

LEMMA (3.3) Nelle condizioni (i), (ii) e (iii), esiste un intorno $I_1 \subset I_1''$ di I_1 ed un intorno $I_2 \subset I_2''$ di I_2 ed esiste $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^+$ tale che, $\forall u \in C^\infty(I_1' \cup I_2') \cap \Lambda_{Y, \varepsilon}(\Omega)$ soluzione dell'equazione (3.4) che verifichi le condizioni al contorno del problema (P''), per $\lambda > \bar{\lambda}$ valgono le disuguaglianze :

$$(3.26) \quad \|D^{0, N}_u, I_1\|^2 + \varepsilon \|D^{0, 2N-2}_u, I_1\|^2 \leq K_Y \|f\|_{N-2}^2$$

$$(3.27) \quad \|D^{0, N}_u, I_2\|^2 + \varepsilon \|D^{0, 2N-2}_u, I_2\|^2 \leq K_Y \|f\|_{N-2}^2$$

Dim Incominciamo a provare la (3.26). Sia $P=(x_0,0)$ un generico punto di Σ_1 , H_1 e H_1' due intorni di P del tipo (3.16). Poniamo nella (3.4):

$$v = (-1)^{N-2} \zeta^2 D^{0,2N-3} u,$$

con $\zeta \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $\text{supp } \zeta \subset H_1'$, $\zeta = 1$ in H_1 . Ora essendo $a + \gamma \bar{a} = (a + \gamma \bar{a})_y = 0$ su Σ_1 , considerando $g = 1$ in I_1'' , tramite integrazioni per parti sfruttando la condizione (ii) si perviene alla disuguaglianza:

$$(3.28) \quad (-1)^{N-2} Q_Y(u, \zeta^2 D^{0,2N-3} u) \geq \gamma ||| d(x, 0) |||_{D^{0,N}, H_1'}^2 - C (||| y |||_{D^{0,N}, H_1'}^2 - \\ - C \sum_{\substack{|\alpha|+k \leq N \\ k < N}} ||| D^{\alpha,k} u, H_1' ||| ||| D^{0,N} u, H_1' ||| - C \sum_{|\alpha|+k \leq N-1} ||| D^{\alpha,k} u, H_1' ||| ||| D^{0,N} u, H_1' |||).$$

Dalla (3.28), con l'ausilio del lemma (5.2) di [2], sfruttando che $d(x,0)=1$, nonché la disuguaglianza (cfr. [2] pag 859):

$$(3.29) \quad \sum_{\substack{|\alpha|+k \leq N \\ k < N}} ||| D^{\alpha,k} u, H_1' |||^2 \leq \eta ||| D^{0,N} u, H_1' |||^2 + B(\eta) \left(\sum_{|\alpha| \leq N} ||| D^{\alpha,0} u, H_1' |||^2 + ||| u, H_1' |||^2 \right),$$

si ricava facilmente la stima:

$$(3.30) \quad (-1)^{N-2} Q_Y(u, \zeta^2 D^{0,2N-3} u) \geq \gamma ||| D^{0,N} u, H_1' |||^2 - \eta \gamma ||| D^{0,N} u, H_1' |||^2 - \\ - \frac{(C+C_Y) B(\eta)}{\gamma} ||| y |||_{D^{0,N}, H_1'}^2 - \frac{C B(\eta)}{\gamma} \sum_{|\alpha| \leq N} ||| D^{\alpha,0} u, H_1' |||^2 - \\ - \frac{C_Y B(\eta)}{\gamma} ||| u |||^2,$$

con η costante arbitraria minore di 1 e $B(\eta)$ costante dipendente da η .

D'altra parte, poichè $(\rho_1)_y = -1$ in I_1 , supposto ζ indipendente da y per $-y \leq \delta_1$, tramite integrazioni per parti, si deduce:

$$(3.31) \quad (-1)^{N-2} \varepsilon (\rho_1 D^{0,N} u, D^{0,N} (\zeta^2 D^{0,2N-3} u)) \geq \varepsilon (N - \frac{3}{2}) ||| D^{0,2N-2} u, H_1' |||^2 - \\ - \varepsilon (K ||| D^{0,2N-2} u, H_1' |||^2 + \eta ||| D^{0,-N-2} u, H_1' |||^2) - B(\eta) \varepsilon ||| D^{0,N} u, H_1' |||^2,$$

dove H_1'' è dato dalla (3.17).

Infine, utilizzando la disuguaglianza (3.29), con integrazioni per parti si ottiene:

$$(3.32) \quad \varepsilon (-1)^{N-2} \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq N} (\rho_1 G_1^{\alpha, \beta}(x) D^{\alpha, 0}_{u, D} D^{\beta, 0} (\zeta^2 D^{0, 2N-3} u)) \geq \\ \geq -\varepsilon \eta \left(\sum_{|\alpha|=N-1} \|D^{\alpha, N}_{u, H_1'}\|^2 + \sum_{|\alpha|=2N-1} \|D^{\alpha, 0}_{u, H_1'}\|^2 + \|D^{0, 2N-2}_{u, H_1'}\|^2 \right) - \\ - B(\eta) (\|u_{, H_1'}\|^2 + \|D^{0, N}_{u, H_1'}\|^2).$$

Dalle (3.30), (3.31), (3.32), (3.4), per $\eta < \frac{1}{3}, \lambda > CB(\eta)$, $-y \leq \delta_1 < -\frac{\gamma^2}{8(C+C_\lambda)B(\eta)}$, con l'ausilio dei lemmi (3.1) e (3.2) si ricava la (3.26).

La dimostrazione della (3.27) procede in maniera del tutto analoga a quella della (3.26), tenendo presente che in questo caso la (3.28) si ottiene nella forma:

$$(3.33) \quad (-1)^{N-2} Q_Y(u, \zeta^2 D^{0, 2N-3} u) \geq \| |a_Y(x, 0)|^{\frac{1}{2}} D^{0, N}_{u, H_2} \|^2 - C(\eta \|D^{0, N}_{u, H_2'}\|^2 + \\ + \| |y|^{\frac{1}{2}} D^{0, N}_{u, H_2'} \|^2 + B(\eta) \sum_{\substack{|\alpha|+k \leq N \\ k < N}} \|D^{\alpha, k}_{u, H_2'}\|^2) - C_\lambda \sum_{|\alpha|+k \leq N-1} \|D^{\alpha, k}_{u, H_2'}\|^2,$$

con η costante arbitraria minore di 1 e $B(\eta)$ costante dipendente da η .

Ora sfruttando che $a_Y(x, 0) < 0$ su $\bar{E}_2$ e che $\bar{E}_2$ è disgiunta da $\bar{E}_1 \cup \bar{E}_3$, continuando come nella dimostrazione precedente si ottiene la (3.27).

Dimostrazione della Proposizione (3.1)

La Proposizione (3.1) discende facilmente dai lemmi (3.2) e (3.3), nonché dalle disuguaglianze (3.29) e (3.5).

4. Dimostrazione del Teorema I

Seguendo i ragionamenti di Kohn-Nirenberg in [2] (cfr. pagg. 854-856), considerando $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, si ha che esiste un'unica soluzione $u_{Y, \varepsilon} \in E_{Y, \varepsilon}$ dell'equazione (3.4). Tale soluzione è C^∞ negli intorni I'_1 di E_1 e I'_2 di E_2 ($I'_1 = \text{supp } \rho_1$,

$I'_2 = \text{supp } \phi_2$, inoltre verifica le condizioni al bordo :

$$u|_{\Sigma} = 0, \quad \frac{du}{dv}|_{\Sigma_3} = 0, \quad \frac{d^n u}{d\nu^n}|_{\Sigma_2} = 0 \quad n=1, N, \dots, 2N-3, \quad \frac{d^n u}{d\nu^n}|_{\Sigma_1} = 0 \quad n=N, \dots, 2N-3.$$

Dalla proposizione (3.1) e dalla (3.7) si trae che esiste un intorno $I_{1,2}$ di $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ ($I_{1,2} \subset I'_1 \cap I'_2$) tale che :

$$(4.1) \quad \|u_{Y,\varepsilon}, I_{1,2}\|_{N_1} + \|u_{Y,\varepsilon}, \bar{\Omega} - I_{1,2}\|_2 \leq K_Y \|f\|_{N-2}.$$

Tenendo presente che :

$$Q(u, u) + \gamma Q'(u, u) \geq K \|u\|_1,$$

dalla (3.4) si ha :

$$(4.2) \quad \varepsilon (Q_1(u_{Y,\varepsilon}, u_{Y,\varepsilon}) + Q_2(u_{Y,\varepsilon}, u_{Y,\varepsilon})) \leq K \|f\|.$$

Dalle (4.1) e (4.2), ragionando come in (2) , cioè facendo tendere ε a zero, si ha che $u_{Y,\varepsilon}$ tende a una funzione u_Y che è soluzione del problema :

$$\begin{cases} Q(u_Y, v) + \gamma Q'(u_Y, v) = (f, v) & f \in C^\infty(\bar{\Omega}) \\ u|_{\Sigma} = 0, \quad \frac{du}{d\nu}|_{\Sigma_2 \cup \Sigma_3} = 0 \end{cases}$$

e verifica la disuguaglianza :

$$(4.3) \quad \|u_Y, I_{1,2}\|_N \leq K_Y \|f\|_{N-2}$$

Inoltre $u_Y \in C^\infty(\bar{\Omega} \cup \Sigma_3)$, infatti essa è soluzione dell'equazione :

$$(L + \gamma(L' + L'')) u_Y = f$$

che è ellittica in $\bar{\Omega} \cup \Sigma_3$.

Pertanto a u_Y si può applicare la stima della proposizione (2.1), cioè :

$$(4.4) \quad \|u_Y, \bar{\Omega}\|_{\frac{N+3}{2}} + \|u_Y, \bar{\Omega} - I_1\|_{N+2} \leq K \|f\|_N \quad (N \geq 2).$$

Osservando inoltre che :

$$\gamma |Q'(u_Y, v)| \leq \gamma K \|f\|_2 \|v\|_2,$$

facendo tendere γ a zero, se $f \in W^N(\bar{\Omega})$, si ha che u_γ tende ad una soluzione u del problema :

$$\begin{cases} Q(u,v) = (f,v) & f \in W^N(\bar{\Omega}) \quad (N \geq 2) \\ u|_{\Sigma} = 0, \quad \frac{du}{dv}|_{\Sigma_2 \cup \Sigma_3} = 0 \end{cases}$$

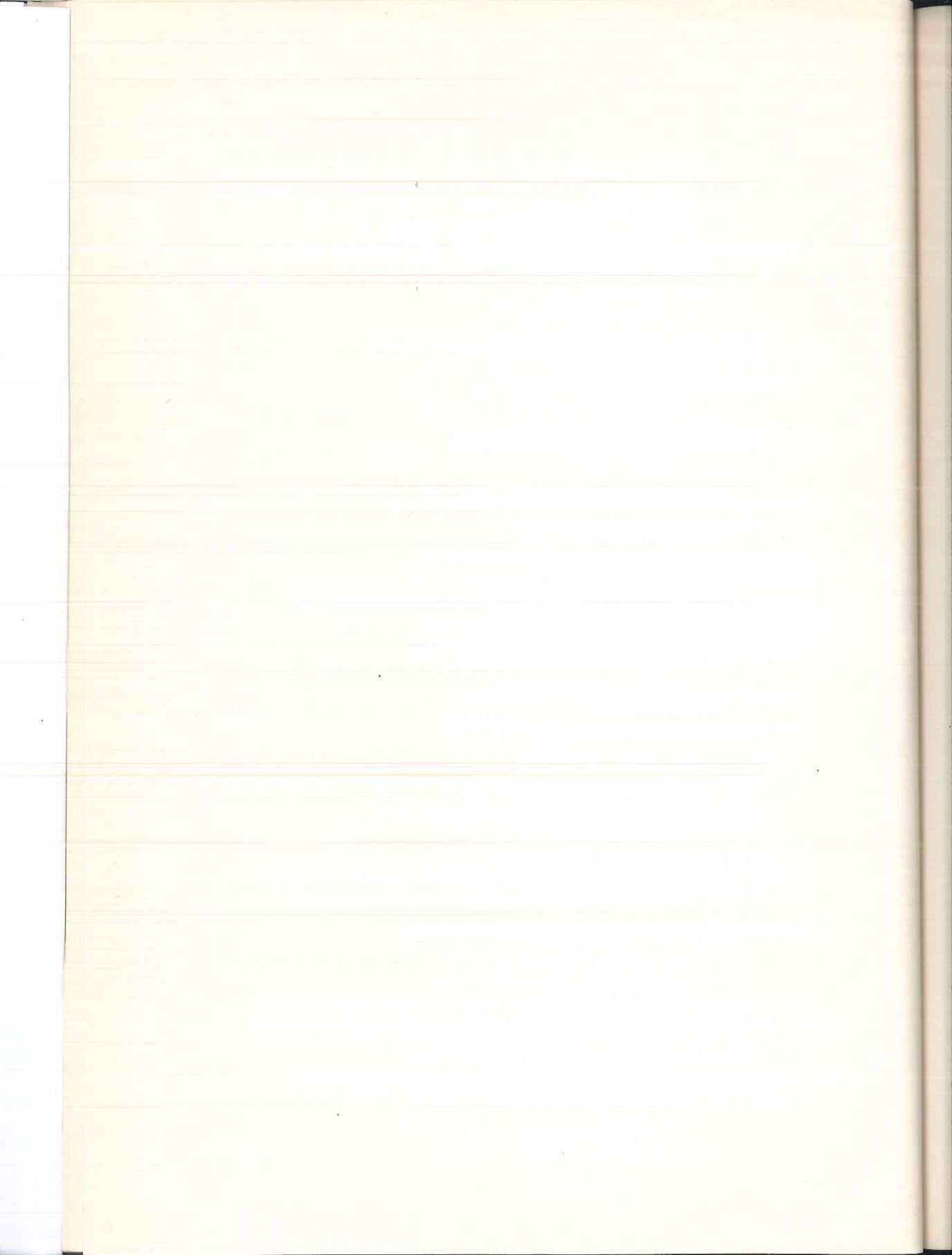
e u verifica la disuguaglianza (4.4) ; pertanto , se $N \geq 5$ u è anche una soluzione classica del problema (P) .

Da ciò si deduce il teorema .

Bibliografia

[1] V. ESPOSITO " Su alcune equazioni ellittico paraboliche degeneri del IV ordine " *Ren. Acc. Scienze Fisiche e Matematiche Ser. IV Vol LI/1 Anno 1984* .

[2] J. J. KOHN and L. NIRENBERG " Degenerate elliptic-parabolic equations of second order " *Comm. Pure Appl. Math. (1967) 797-870* .



NUCLEO DI POISSON
PER UN OPERATORE DI TIPO GRUSCHIN IN UN SEMISPAZIO

Nota di Vincenzo Esposito e Dorianio Miserendino
Presentata dal Socio Ordinario Carlo Ciliberto
Adunanza del 16 novembre 1985

Abstract. A Poisson operator for the Gruschin operator $D_y^2 + D_{x_1}^2 + y^2 D_{x_2}^2$ is constructed.

Riassunto. Si costruisce un operatore di Poisson per l'operatore di tipo Gruschin $D_y^2 + D_{x_1}^2 + y^2 D_{x_2}^2$.

Si consideri nel semispazio di R^3 $\Omega = \{(x_1, x_2, y) \in R^3 : y > 0\}$ il seguente operatore di tipo Gruschin :

$$P(x, y, D_x, D_y) = D_y^2 + D_{x_1}^2 + y^2 D_{x_2}^2 \quad (D_{x_j} = \frac{1}{i} \partial_{x_j}, D_y = \frac{1}{i} \partial_y)$$

Scopo della presente nota è costruire un operatore di Poisson per P in Ω e cioè (cfr. {1}) un operatore K lineare e continuo di $C_c^\infty(\partial\Omega)$ in $C^\infty(\bar{\Omega})$ il quale goda delle seguenti proprietà :

- i) K è prolungabile in un operatore lineare e continuo di $\mathcal{E}'(\partial\Omega)$ in $\mathcal{D}'(\bar{\Omega}) \cap C^\infty(\bar{\Omega})$.⁽¹⁾
- ii) PK è prolungabile in un operatore lineare e continuo di $\mathcal{E}'(\partial\Omega)$ in $C^\infty(\bar{\Omega})$.
- iii) Posto $\gamma_0 K(g) = K(g)|_{\partial\Omega}$ e $I_d(g) = g \quad \forall g \in C_c^\infty(\partial\Omega)$, l'operatore $(\gamma_0 K) - I_d$ è prolungabile in un operatore lineare e continuo di $\mathcal{E}'(\partial\Omega)$ in $C^\infty(\partial\Omega)$.

Seguendo l'impostazione di Boutet De Monvel in {1}, cercheremo l'operatore K nella forma seguente :

(1) Con $\mathcal{D}'(\bar{\Omega}) \cap C^\infty(\bar{\Omega})$ intendiamo l'insieme delle distribuzioni in R^3 con supporto contenuto in $\bar{\Omega}$ e di classe C^∞ in Ω .

$$(1) \quad K g(x, y) = \int_{R_2} e^{ix\xi} k(y, \xi) \hat{g}(\xi) d\xi$$

$$x = (x_1, x_2) \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \quad d\xi_i = (2\pi)^{-1} d\xi_i$$

Osserviamo che se K è un nucleo di Poisson per P in Ω , $\forall g \in \mathcal{C}'(\partial\Omega)$, Kg è una soluzione approssimata del problema :

$$(I) \quad \begin{cases} Pu = 0 & \text{in } \Omega \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}$$

nel senso che risulta :

$$\begin{cases} P(Kg) = 0 + h_1 & \text{con } h_1 \in C^\infty(\bar{\Omega}) \\ Kg|_{\partial\Omega} = g + h_2 & \text{con } h_2 \in C^\infty(\partial\Omega) ; \end{cases}$$

quindi l'idea più naturale è di cercare di determinare una funzione $k(y, \xi)$ tale che $\forall g \in C_c^\infty(\partial\Omega)$ la funzione Kg fornita dalla (1) sia una soluzione esatta del problema (I) .

Supposto che $k(y, \xi)$ sia sufficientemente regolare , derivando sotto il segno di integrale si ha :

$$P(Kg) = \int_{R_2} e^{ix\xi} (D_y^2 + \xi_1^2 + y^2 \xi_2^2) k(y, \xi) \hat{g}(\xi) d\xi$$

Da cui Kg è soluzione del problema (I) se k è soluzione del seguente problema :

$$(II) \quad \begin{cases} (D_y^2 + \xi_1^2 + y^2 \xi_2^2) k(y, \xi) = 0 & \text{per } y > 0 \text{ e } \xi \in R_2 \\ k(0, \xi) = 1 \end{cases}$$

Il §1 contiene definizioni e richiami di risultati noti . Nel §2 determiniamo una soluzione esatta $k'(y, \xi)$ del problema (II) in $R_0^+ \times (R_2 - \{\xi_2 = 0\})$, per la quale stabiliremo proprietà di natura pseudodifferenziale . Tale soluzione perde significato per $\xi_2 = 0$, tuttavia con un classico procedimento di ricorrenza , è possibile costruire in $R_0^+ \times (R_2 - \{\xi_1 = 0\})$ una soluzione formale $k''(y, \xi)$ mediante un'opportuna serie di simboli . Ciò è oggetto del §3 , dove dimostreremo anche che detta serie individua una classe di simboli , che opportunamente raccordati con la soluzione esatta forniscono simboli di nuclei di

Poisson . La costruzione di questi ultimi è oggetto del § 4 .

§ 1 Richiami e definizioni .

Sia $m \in \mathbb{R}$ e Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$; indichiamo con $S^m(\Omega)$ la classe dei simboli $a(x, \xi) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ tali che $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ e $\forall$ compatto $H \subset \Omega$ esiste $C > 0$ tale che

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{m - |\alpha|} \quad \forall x \in H \text{ e } \forall \xi \in \mathbb{R}^n .$$

Poniamo poi : $S^{-\infty}(\Omega) = \bigcap_{m \in \mathbb{R}} S^m(\Omega) , \quad S(\Omega) = \bigcup_{m \in \mathbb{R}} S^m(\Omega) .$

Per le proprietà di tali classi di simboli cfr. F. Trèves [4] .

Per ogni $u \in C_c^\infty(\Omega)$ indichiamo con $\hat{u}$ la trasformata di Fourier di u :

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} u(x) dx .$$

Ricordiamo che se $a(x, \xi)$ è un simbolo di $S(\Omega)$ l'operatore P lineare e continuo di $C_c^\infty(\Omega)$ in $C^\infty(\Omega)$:

$$Pu = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} a(x, \xi) \hat{u}(\xi) d\xi$$

è un operatore pseudodifferenziale standard dotato di simbolo . E' ben noto che se $a(x, \xi) \in S^{-\infty}(\Omega)$ P è un operatore regolarizzante , cioè è prolungabile in un operatore lineare e continuo di $\mathcal{D}'(\Omega)$ in $C^\infty(\Omega)$.

Sia ora Γ un generico cono completo con vertice nell'origine del piano (ξ_1, ξ_2) ; indichiamo con $\Sigma^m(\mathbb{R}_0^+ \times \Gamma)$ la classe dei simboli $a(y, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+ \times \Gamma)$ tali che $\forall p, q \in \mathbb{N}_0$ esiste $C > 0$:

$$|y^p \partial_y^q a(y, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{m - \frac{p}{2} + q} \quad \forall y \in \mathbb{R}_0^+ \text{ e } \forall \xi \in \Gamma .$$

Poniamo poi : $\Sigma^{-\infty}(\mathbb{R}_0^+ \times \Gamma) = \bigcap_{m \in \mathbb{R}} \Sigma^m(\mathbb{R}_0^+ \times \Gamma) , \quad \Sigma(\mathbb{R}_0^+ \times \Gamma) = \bigcup_{m \in \mathbb{R}} \Sigma^m(\mathbb{R}_0^+ \times \Gamma) .$

In analogia a quanto si fa per i simboli di $S(\Omega)$ è possibile considerare serie formali di simboli di $\Sigma(\mathbb{R}_0^+ \times \Gamma)$:

una successione $(a_n(y, \xi))_{n \in \mathbb{N}}$ di simboli di $\Sigma(R_0^+ \times \Gamma)$ si dice serie formale, si de
 nota con $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(y, \xi)$, quando esiste una successione $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di numeri reali stret
 tamente de cre sce nte e divergente negativamente tali che $a(y, \xi) \in \Sigma_{(R_0^+ \times \Gamma)}^{m_n}$.

Si dice poi che il simbolo $a(y, \xi)$ è rappresentato dalla serie formale
 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(y, \xi)$ e si scrive :

$$a(y, \xi) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y, \xi)$$

quando esiste una successione $(m_j)_{j \in \mathbb{N}}$ di numeri reali strettamente decrescente
 e divergente negativamente tali che

$$(a(y, \xi) - \sum_{n=0}^j a_n(y, \xi)) \in \Sigma_{(R_0^+ \times \Gamma)}^{m_j}.$$

Con procedimenti analoghi a quelli usati per le serie formali di simboli di
 $S(\Omega)$ si dimostra la seguente proposizione: (cfr. Chazarain-Priou (2))

PROPOSIZIONE 1.1

Per ogni serie formale di simboli di $\Sigma(R_0^+ \times \Gamma)$ esiste un simbolo $a(y, \xi)$ di
 $\Sigma(R_0^+ \times \Gamma)$, determinato a meno di simboli di $\Sigma^{-\infty}(R_0^+ \times \Gamma)$, tale che

$$a(y, \xi) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(y, \xi), \quad a(y, \xi) \in \Sigma_{(R_0^+ \times \Gamma)}^{m_0}.$$

§ 2. Costruzione di una soluzione esatta del problema (II)

Fissato $\xi_2 \neq 0$, effettuando la sostituzione $z = 2y + |\xi_2|^{\frac{1}{2}}$ l'equazione del
 problema (II) si trasforma allora nella seguente :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\xi_1^2}{2|\xi_2|} - \frac{z^2}{4} \right) v = 0 \quad \text{con } z > 0,$$

che, posto $v = -\frac{\xi_1^2}{2|\xi_2|} - \frac{1}{2}$, si scrive :

$$(2.1) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \left(v + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4} \right) v = 0 \quad \text{con } z > 0.$$

Tale equazione è la classica equazione di Weber. Essa ammette una soluzione $v(z, \xi)$ intera rispetto a z la cui restrizione a R^+ è data da: (cfr. {5})

$$(2.2) \quad v(z, \xi) = e^{-\frac{z^2}{4}} \psi\left(-\frac{v}{2}, \frac{1}{2}, \frac{z^2}{2}\right),$$

con:

$$(2.3) \quad \psi\left(-\frac{v}{2}, \frac{1}{2}, \frac{z^2}{2}\right) = \frac{1}{\Gamma(-\frac{v}{2})} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}t} t^{-\frac{v}{2}-1} (1+t)^{\frac{1}{2}+\frac{v}{2}-1} dt.$$

Risulta inoltre:

$$(2.4) \quad v(0, \xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1-v}{2})}.$$

Dalle (2.2), (2.3), (2.4) si ha che la funzione:

$$(2.5) \quad k'(y, \xi) = e^{\frac{y^2 |\xi_2|}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{\xi_1^2}{4|\xi_2|} + \frac{1}{4})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{\xi_1^2}{4|\xi_2|} + \frac{1}{4})} \int_0^{+\infty} e^{-y^2 |\xi_2| t} t^{\frac{\xi_1^2}{4|\xi_2|} - \frac{3}{4}} (1+t)^{-\frac{\xi_1^2}{4|\xi_2|} - \frac{3}{4}} dt$$

con $y > 0$,

è una soluzione del problema (II) di classe $C^\infty(R_0^+ \times R_{\xi_1} \times \dot{R}_{\xi_2})$ ($R_{\xi_2} = R_{\xi_2} - \{0\}$).

Sia ora per ogni $c \in R^+$ Γ_c' il cono definito dalla limitazione: $c|\xi_1| \leq |\xi_2|$; poniamo $\dot{\Gamma}_c' = \Gamma_c' - \{(0,0)\}$.

Risulta allora $k'(y, \xi) \in C^\infty(R_0^+ \times \dot{\Gamma}_c')$ $\forall c \in R^+$.

Al fine di inquadrare $k'(y, \xi)$ in una classe di simboli di operatori pseudodifferenziali dimostriamo i seguenti risultati:

PROPOSIZIONE 2.1

Per ogni $c \in R^+$, per ogni $p \in q \in \mathbb{N}_0$ e per ogni $p > 0$ esiste $C > 0$ tale che risulti:

$$(2.6) \quad |y^{p+q} \partial_y^q k'(y, \xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-\frac{p}{2}} \quad \forall y \in R_0^+, \xi \in \dot{\Gamma}_c' \text{ con } |\xi| > 0.$$

Dim. Poniamo:

$$\phi_1(\xi) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\xi_1^2}{4|\xi_2|} + \frac{1}{4}\right) / \sqrt{\pi} \left(\frac{\xi_1^2}{4|\xi_2|} + \frac{1}{4}\right)$$

$$\phi_2(t, y, \xi_2) = e^{-y^2 |\xi_2| \left(\frac{1}{2} + t\right)},$$

$$\phi_3(t, \xi) = t^{\frac{\xi_1^2}{4|\xi_2|} - \frac{3}{4}} (1+t)^{-\frac{\xi_1^2}{4|\xi_2|} - \frac{3}{4}}.$$

Quindi risulta :

$$(2.7) \quad k'(y, \xi) = \phi_1(\xi) \int_0^{+\infty} \phi_2(t, y, \xi_2) \phi_3(t, \xi) dt.$$

Osserviamo che si ha:

$$(2.8) \quad |\phi_1(\xi) \int_0^{+\infty} \phi_3(t, \xi) dt| = k'(0, \xi) = 1 \quad \forall \xi \in \Gamma'_c.$$

Facciamo vedere ora che $\forall p \in \mathbb{N}_0$ e $\forall \rho > 0$ esiste $C > 0$:

$$(2.9) \quad |y^{p+q} \partial_y^q \phi_2(t, y, \xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-\frac{p}{2}} \quad \forall \xi \in \Gamma'_c, \quad \forall t, y \in \mathbb{R}_0^+ \quad \text{con } |\xi| \geq \rho.$$

Iniziamo con l'osservare che se η è un numero reale si ha :

$$(2.10) \quad \partial_y^q e^{-y^2 \eta} = \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} c_i \eta^{q-i} y^{q-2i} \right) e^{-y^2 \eta} \quad \forall q \in \mathbb{N}_0,$$

essendo $c_0, c_1, \dots$ opportune costanti e $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor$ la parte intera di $\frac{q}{2}$.

Dalla (2.10) si deduce :

$$(2.11) \quad |y^{p+q} \partial_y^q \phi_2(t, y, \xi_2)| = \\ = |y^{p+q} e^{-y^2 |\xi_2| (\frac{1}{2}+t)} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} c_i |\xi_2|^{q-i} y^{q-2i} \left(\sum_{j=0}^{q-i} \binom{q-i}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^j t^{q-i-j} \right)|.$$

Fissati ora un indice i compreso tra 0 e $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor$ e un indice j compreso tra 0 e $q-i$, risulta se $q-i-j=0$:

$$(2.12) \quad |y^{p+q} e^{-y^2 |\xi_2| (\frac{1}{2}+t)} |\xi_2|^{q-i} y^{q-2i} t^{q-i-j}| \leq |e^{-\frac{y^2 |\xi_2|}{2}} (y^2 |\xi_2|)^{q-i+\frac{p}{2}} |\xi_2|^{-\frac{p}{2}}| \leq \\ \leq C(1+|\xi|)^{-\frac{p}{2}} \quad \forall \xi \in \Gamma'_c \quad \text{con } |\xi| \geq \rho;$$

se $q-i-j > 0$ risulta invece :

$$(2.13) \quad |y^{p+q} e^{-y^2 |\xi_2| (\frac{1}{2}+t)} |\xi_2|^{q-i} y^{q-2i} t^{q-i-j}| = \\ = |e^{-y^2 |\xi_2| t} (y^2 |\xi_2| t)^{q-i-j} e^{-\frac{1}{2} y^2 |\xi_2|} (y^2 |\xi_2|)^{j+\frac{p}{2}} |\xi_2|^{-\frac{p}{2}}| \leq$$

$$\leq C(1+|\xi|)^{-\frac{p}{2}} \quad \forall \xi \in \Gamma'_C \text{ con } |\xi| \geq p.$$

Dalle (2.11), (2.12) e (2.13) si deduce la (2.9). Dalle (2.7), (2.8) e (2.9) si deduce la (2.6).

PROPOSIZIONE 2.2

Per ogni $c \in \mathbb{R}^+$, per ogni $p \in \mathbb{N}_0$ e per ogni $\rho > 0$ esiste $C > 0$ tale che risulti:

$$(2.14) \quad |y^p \partial_y^q k'(y, \xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-\frac{p}{2}+q} \quad \forall y \in \mathbb{R}_0^+, \forall \xi \in \Gamma'_C \text{ con } |\xi| \geq \rho.$$

Dim. Se $q = 0$ la (2.14) è un'immediata conseguenza della (2.6). Se $q > 0$ e $(1+|\xi|)y \geq 1$ la (2.14) si deduce facilmente dalla (2.6). Per dimostrare infine la (2.14) nel caso che sia $q > 0$ e $(1+|\xi|)y \leq 1$ procediamo come segue.

Consideriamo la funzione: $v'(z, \xi) = \frac{v(z, \xi)}{v(0, \xi)}$. Essendo questa intera rispetto a z risulta:

$$v'(z, \xi) = a_0(\xi) + a_1(\xi)z + \dots + a_n(\xi)z^n + \dots \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\text{con } a_0(\xi) = 1, \quad a_1(\xi) = -\sqrt{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{\xi_1^2}{4|\xi_2|} + \frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4|\xi_2|} + \frac{1}{4})}, \quad (\text{cfr. } \{5\})$$

$$\text{Poichè } v'(z, \xi) \text{ è soluzione dell'equazione (2.1), posto: } \lambda = -(v + \frac{1}{2}) = \frac{\xi_1^2}{2|\xi_2|},$$

i coefficienti dello sviluppo di $v'(z, \xi)$ verificano il seguente sistema di equazioni ricorrenti:

$$(2.15) \quad \begin{cases} 2a_2 - \lambda a_0 = 0 \\ 6a_3 - \lambda a_1 = 0 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - \lambda a_n - \frac{n-2}{4}a_n = 0 \end{cases} \quad \forall n \geq 2$$

Le equazioni (2.15) determinano i coefficienti a_n .

Osserviamo ora che considerato un $c \in \mathbb{R}^+$ ed il cono Γ'_C esiste $C > 1$ tale che

$$(2.16) \quad |\lambda| \leq C(1+|\xi|), \quad |a_1| \leq C(1+|\xi|)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \xi \in \Gamma'_C$$

Dal sistema (2.15) e dalla (2.16) si ricava:

$$|a_2| \leq \frac{1}{2}C(1+|\xi|), \quad |a_4| \leq \frac{C^2}{12}(1+|\xi|)^2,$$

ragionando per ricorrenza si prova che :

$$(2.17) \quad |a_{2n}| \leq \frac{C^n}{(2n)(2n-1)(n-1)!} (1+|\xi|)^n \quad \forall \xi \in \Gamma'_C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

In modo analogo, dal sistema (2.15) tenendo presente la seconda delle (2.16), si deduce che:

$$(2.18) \quad |a_{2n+1}| \leq \frac{C^{n+1}}{(2n+1)(2n)n!} (1+|\xi|)^{n+\frac{1}{2}} \quad \forall \xi \in \Gamma'_C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ricordiamo ora che risulta:

$$(2.19) \quad k'(y, \xi) = v'(\sqrt{2}y|\xi_2|^{\frac{1}{2}}, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\xi) (\sqrt{2}y|\xi_2|^{\frac{1}{2}})^n \quad \forall y \geq 0, \quad \forall \xi \in R_{\xi_1} \times R_{\xi_2}.$$

Quindi per ogni $q \in \mathbb{N}$ si ha :

$$(2.20) \quad \begin{aligned} |\partial_y^q k'(y, \xi)| &= |\partial_y^q v'(\sqrt{2}y|\xi_2|^{\frac{1}{2}}, \xi)| \leq \\ &\leq \sum_{n \geq \frac{q}{2}} 2n(2n-1) \dots (2n-q+1) |a_{2n}| (\sqrt{2}|\xi_2|^{\frac{1}{2}})^{2n} y^{2n-q} + \\ &+ \sum_{n \geq \frac{q-1}{2}} (2n+1) \dots (2n-q+2) |a_{2n+1}| (\sqrt{2}|\xi_2|^{\frac{1}{2}})^{2n+1} y^{2n+1-q}. \end{aligned}$$

Dalla (2.17) si ricava poi :

$$(2.21) \quad \begin{aligned} \sum_{n \geq \frac{q}{2}} 2n \dots (2n-q+1) |a_{2n}| (\sqrt{2}|\xi_2|^{\frac{1}{2}})^{2n} y^{2n-q} &\leq \\ &\leq \sum_{n \geq \frac{q}{2}} (2C)^n \frac{(2n-2) \dots (2n-q+1)}{(n-1)!} ((1+|\xi|)y)^{2n-q} (1+|\xi|)^{-q} \leq \\ &\leq C(1+|\xi|)^q \quad \forall y \in R_0^+, \quad \forall \xi \in \Gamma'_C, \quad \text{con } (1+|\xi|)y \leq 1. \end{aligned}$$

In modo analogo dalla (2.18) si ha :

$$(2.22) \quad \begin{aligned} \sum_{n \geq \frac{q-1}{2}} (2n+1) \dots (2n-q+2) |a_{2n+1}| (\sqrt{2}|\xi_2|^{\frac{1}{2}})^{2n+1} y^{2n+1-q} &\leq \\ &\leq C(1+|\xi|)^q \quad \forall y \in R_0^+, \quad \forall \xi \in \Gamma'_C, \quad \text{con } (1+|\xi|)y \leq 1. \end{aligned}$$

Dalle (2.20), (2.21) e (2.22) segue che $\forall q \in \mathbb{N}$ e $\forall p \in \mathbb{N}_0$ esiste $C > 0$ tale che

$$(2.23) \quad |y^p \partial_y^q k'(y, \xi)| \leq C(1+|\xi|)^{q-p} \quad \forall y \in \mathbb{R}_0^+, \quad \forall \xi \in \Gamma_C', \text{ con } (1+|\xi|)y \leq 1.$$

Dalla (2.23) segue la validità della (2.14) nel caso $(1+|\xi|)y \leq 1$ e $q > 0$.

Dalla Proposizione 2.2 discende il seguente :

TEOREMA 2.1

Sia $\chi(t)$ una funzione di $C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\chi(t)=1$ per $t \geq 1$, $\chi(t)=0$ per $t \leq \frac{1}{2}$; allora per ogni $c \in \mathbb{R}^+$ la funzione $\chi(|\xi|) k(y, \xi) \in \mathcal{L}^0(\mathbb{R}_0^+ \times \Gamma_C')$.

§ 3 Costruzione di una soluzione formale del problema (II)

Consideriamo il problema:

$$(3.1) \quad \begin{cases} (D_y^2 + \xi_1^2) k_0(y, \xi) = 0 & \text{per } y > 0 \\ k_0(0, \xi) = 1; \end{cases}$$

esso ammette la soluzione $k_0(y, \xi) = e^{-y|\xi_1|}$, la quale gode della seguente proprietà di omogeneità :

$$k_0\left(\frac{y}{\lambda}, \lambda \xi\right) = k_0(y, \xi) \quad \forall \lambda > 0.$$

Cercheremo allora una soluzione del problema (II) del tipo :

$$k(y, \xi) \sim \sum_{r \geq 0} k_{-r}(y, \xi), \quad k_{-r}\left(\frac{y}{\lambda}, \lambda \xi\right) = \lambda^{-r} k_{-r}(y, \xi) \quad \forall \lambda > 0.$$

A tale scopo, sia $\forall c \in \mathbb{R}^+$ Γ_C il cono definito dalla limitazione: $c|\xi_1| \geq |\xi_2|$; poniamo $\dot{\Gamma}_C = \Gamma_C - \{(0, 0)\}$.

Diamo poi la seguente :

DEFINIZIONE 3.1

Sia $m \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}^+$, poniamo :

$$\Phi_C^m = \{f(y, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+ \times \dot{\Gamma}_C) : f\left(\frac{y}{\lambda}, \lambda \xi\right) = \lambda^m f(y, \xi) \quad \forall \lambda > 0\}$$

Cercheremo una soluzione del tipo suddetto con $k_{-r} \in \phi_c^{-r}$.

Si noti che :

$$D_y^2 : \phi_c^m \longrightarrow \phi_c^{m+2}, \quad \xi_1^2 : \phi_c^m \longrightarrow \phi_c^{m+2}, \quad \xi_2^2 : \phi_c^m \longrightarrow \phi_c^{m+2}, \quad y^2 : \phi_c^m \longrightarrow \phi_c^{m-2}$$

e quindi posto $L = D_y^2 + \xi_1^2$ si ha che :

$$(3.2) \quad L : \phi_c^m \longrightarrow \phi_c^{m+2}, \quad y^2 \xi_2^2 : \phi_c^m \longrightarrow \phi_c^m.$$

Posto $h(y, \xi) = Lk + y^2 \xi_2^2 k$, il problema (II) si scrive :

$$(3.3) \quad \begin{cases} h(y, \xi) = 0 \\ k(0, \xi) = 1 \end{cases}$$

Si osservi che se $k \sim \sum_{r \geq 0} k_{-r}$ con $k_{-r} \in \phi_c^{-r}$, per le (3.2) si ha che

$$h \sim \sum_{r \geq 0} h_{-r+2} \quad \text{con } h_{-r+2} \in \phi_c^{-r+2} \quad \forall r \in \mathbb{N}_0, \text{ e con :}$$

$$\begin{cases} h_2(y, \xi) = Lk_0 \\ h_1(y, \xi) = Lk_{-1} \\ h_{-r+2}(y, \xi) = Lk_{-r} + y^2 \xi_2^2 k_{-r+2} \end{cases} \quad \text{per } r \geq 2.$$

E' quindi naturale, per risolvere il problema (3.3), imporre le condizioni :

$$(3.4) \quad \begin{cases} Lk_0 = 0 \\ k_0(y, \xi) = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} Lk_{-1} = 0 \\ k_{-1}(0, \xi) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} Lk_{-r} = -y^2 \xi_2^2 k_{-r+2} \\ k_{-r}(0, \xi) = 0 \end{cases} \quad \text{per } r \geq 2.$$

Il primo problema ammette la soluzione $k_0(y, \xi) = e^{-y|\xi_1|} \in \phi_c^0$; il secondo problema ammette la soluzione $k_{-1} = 0$; il terzo, come si vede con facile calcolo, ammette la soluzione :

$$k_{-2}(y, \xi) = \left(\frac{y^3 \xi_2^2}{6|\xi_1|^3} + \frac{y^2 \xi_2^2}{4|\xi_1|^2} + \frac{y \xi_2^2}{4|\xi_1|} \right) e^{-y|\xi_1|}.$$

Notiamo che $k_{-2} \in \phi_c^{-2}$. Evidentemente si ha poi $k_{-(2r+1)} = 0 \quad \forall r \in \mathbb{N}_0$.

Ragionando per ricorrenza si vede che :

$$(3.5) \quad k_{-2r} = \left(y^{3r} \psi_r + y^{3r-1} \psi_{r-1} + \dots + y \psi_{-2r+1} \right) e^{-y|\xi_1|} \quad \forall r \in \mathbb{N},$$

$$\text{con } \psi_j = \psi_j(\xi) \epsilon_c^j.$$

la (3.5) è vera per $r=1$. Supponiamo che sia vera per $r=n$ e facciamo vedere che è vera per $r=n+1$. Allora per ipotesi k_{-2n} si può scrivere nella forma:

$$k_{-2n} = (y^{3n} \sigma_n + y^{3n-1} \sigma_{n-1} + \dots + y \sigma_{-2n+1}) e^{-y|\xi_1|},$$

cerchiamo $k_{-2(N+1)}$ nella forma:

$$k_{-2(n+1)} = (y^{3(n+1)} \psi_{n+1} + y^{3(n+1)} \psi_n + \dots + y \psi_{-2(n+1)}) e^{-y|\xi_1|}.$$

Si deve imporre che sia:

$$\begin{aligned} & ((3n+3)(3n+2) y^{3(n+1)-2} \psi_{n+1} + (3n+2)(3n+1) y^{3n} \psi_n + \dots + 2 \psi_{-2n}) e^{-y|\xi_1|} + \\ & + 2((3n+3) y^{3(n+1)-1} \psi_{n+1} + (3n+2) y^{3(n+1)-2} \psi_n + \dots + 2 y \psi_{-2n} + \psi_{-2(n+1)+1}) e^{-y|\xi_1|} (-|\xi_1|) \\ & = y^2 \xi_2^2 (y^{3n} \sigma_n + y^{3n-1} \sigma_{n-1} + \dots + y \sigma_{-2(n+1)+1}) e^{-y|\xi_1|}. \end{aligned}$$

Da cui si ha:

$$\psi_{n+1} = - \frac{\xi_2^2 \sigma_n}{6(n+1)|\xi_1|}, \quad \psi_n = \frac{(3n+3)(3n-2) \psi_{n+1} - \xi_2^2 \sigma_{n-1}}{(6n+4)|\xi_1|}, \dots, \psi_{-2n-1} = \frac{\psi_{-2n}}{|\xi_1|}.$$

Si osservi che risulta $\psi_j \epsilon_c^j$ per $j = n+1, \dots, -2n-1$, quindi la (3.5) è dimostrata.

Dalla (3.5) si deduce che $k_{-2r} \epsilon_c^{-2r}$. In definitiva risulta $k_{-r} \epsilon_c^{-r} \quad \forall r \in \mathbb{N}_0$.

Si vede subito che vale la seguente:

PROPOSIZIONE 3.1

Per ogni $a \in \mathbb{R}^+$, per ogni $r, p, q \in \mathbb{N}_0$, per ogni $\alpha \in \mathbb{N}_0$ e per ogni $\rho > 0$ esiste una costante C tale che vale la seguente disuguaglianza:

$$(3.2) \quad |y^p \partial_y^q \partial_\xi^\alpha k_{-2r}| \leq C(1+|\xi|)^{-2r-p+q-|\alpha|} \quad \forall y \in \mathbb{R}_0^+, \quad \forall \xi \in \Gamma_c \quad \text{con } |\xi| \geq \rho.$$

Dim. Se $p=q=0$ e $|\alpha|=0$ si ha per la (3.5) :

$$k_{-2r} = \left(\sum_{j=0}^{3r-1} y^{3r-j} \psi_{r-j}(\xi) \right) e^{-y|\xi_1|}$$

e

$$\begin{aligned} |y^{3r-j} \psi_{r-j}(\xi) e^{-y|\xi_1|}| &= |(y|\xi_1|)^{3r-j} e^{-y|\xi_1|} \cdot |\xi_1|^{-3r+j} \psi_{r-j}(\xi)| \leq \\ &\leq c |\xi_1|^{-3r+j} |\psi_{r-j}(\xi)| = c \left(\frac{|\xi_1|}{|\xi|} \right)^{-3r+j} |\xi|^{-3r+j} |\xi|^{r-j} |\psi_{r-j}(\frac{\xi}{|\xi|})| \leq \\ &\leq c |\xi|^{-2r} \quad \forall y \in R_0^+, \forall \xi \in \Gamma_c, \end{aligned}$$

avendo tenuto presente che $\psi_{r-j}(\frac{\xi_1}{|\xi|}, \frac{\xi_2}{|\xi|})$ è limitata in $\dot{\Gamma}_c$ e che risulta limitata in $\dot{\Gamma}_c$ anche il rapporto $(|\xi_1|/|\xi|)^{-3r+j}$.

La dimostrazione procede in modo analogo nel caso generale.

Dalla Proposizione 3.1 segue che, considerata la funzione $\chi(t) \in C^\infty(R)$ introdotta nel § 2, $\forall c \in R^+$ la funzione $\chi(|\xi|) k_{-2r}(y, \xi)$ è un simbolo di $\Sigma^{-2r}(R_0^+ \times \Gamma_c)$ e quindi la serie :

$\sum_{r \geq 0} \chi(|\xi|) k_{-2r}(y, \xi)$ è una serie formale di simboli di $\Sigma(R_0^+ \times \Gamma_c)$.

Nel solito modo (cfr. (2)) si prova il seguente :

TEOREMA 3.1

Per ogni $c \in R^+$ si può trovare una successione $(\lambda_n)_{n \in N_0}$ crescente e divergente positivamente di numeri positivi tale che la funzione :

$$(3.7) \quad k''(y, \xi) = \sum_{r \geq 0} \chi\left(\frac{|\xi|}{\lambda_r}\right) k_{-2r}(y, \xi)$$

sia un simbolo di $\Sigma^0(R_0^+ \times \Gamma_c)$ rappresentato dalla serie formale $\sum_{r \geq 0} \chi(|\xi|/\lambda_r) k_{-2r}$.

Fissati due numeri positivi c_1 e c_2 con $c_1 > c_2$, consideriamo i due coni :

$$\Gamma_{c_1} = \{(\xi_1, \xi_2) : c_1 |\xi_1| \geq |\xi_2|\} \quad , \quad \Gamma'_{c_2} = \{(\xi_1, \xi_2) : c_2 |\xi_1| \leq |\xi_2|\} ,$$

rispettivamente ad asse orizzontale e verticale .

Siano poi $\psi_1(\xi)$ e $\psi_2(\xi)$ due funzioni non negative di $C^\infty(R_2)$ con derivate limitate per $|\xi| \geq \rho$ $\forall \rho > 0$ e tali che sia :

$$\begin{cases} \psi_1(\xi) = 1 & \text{in } \Gamma'_{c_2} - \Gamma_{c_1} \\ \psi_1(\xi) = 0 & \text{in } \Gamma_{c_1} - \Gamma'_{c_2} \end{cases} \quad \begin{cases} \psi_2(\xi) = 1 & \text{in } \Gamma_{c_1} - \Gamma'_{c_2} \\ \psi_2(\xi) = 0 & \text{in } \Gamma'_{c_2} - \Gamma_{c_1} \end{cases}$$

$$\psi_1(\xi) + \psi_2(\xi) = 1 \quad \text{in } R_2 .$$

Poniamo ora :

$$k_1(y, \xi) = \psi_1(\xi) \chi(|\xi|) k'(y, \xi) \quad , \quad k_2(y, \xi) = \psi_2(\xi) k''(y, \xi) \quad , \quad k(y, \xi) = k_1(y, \xi) + k_2(y, \xi) ,$$

$$\text{Evidentemente } k_i(y, \xi) \in \Sigma^0(R_0^+ \times R_2) \quad i=1,2, \quad k(y, \xi) \in \Sigma^0(R_0^+ \times R_2) .$$

Consideriamo poi gli operatori :

$$K_1 g(x, y) = \int_{R_2} e^{ix\xi} k_1(y, \xi) \hat{g}(\xi) d\xi \quad \forall g \in C_c^\infty(\partial\Omega) ,$$

$$K_2 g(x, y) = \int_{R_2} e^{ix\xi} k_2(y, \xi) \hat{g}(\xi) d\xi \quad \forall g \in C_c^\infty(\partial\Omega) ,$$

$$Kg(x, y) = \int_{R_2} e^{ix\xi} k(y, \xi) \hat{g}(\xi) d\xi \quad \forall g \in C_c^\infty(\partial\Omega) .$$

Evidentemente $K_1 g$, $K_2 g$, Kg sono funzioni di $C^\infty(\bar{\Omega})$, risulta inoltre :

$$K = K_1 + K_2 .$$

Faremo vedere che K è un operatore di Poisson per P in Ω .

Cominciamo a dimostrare il seguente :

TEOREMA 4.1

L'operatore K è lineare e continuo da $C_c^\infty(\partial\Omega)$ in $C^\infty(\bar{\Omega})$.

Dim. Come già è stato osservato risulta $Kg \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Per dimostrare la continuità iniziamo a far vedere che K è continuo da $C_c^\infty(\partial\Omega)$ in $L_{loc}^1(\bar{\Omega})$, e cioè che, se $g_n \rightarrow g$ in $C_c^\infty(\partial\Omega)$, $\forall \psi \in C_c^\infty(\bar{\Omega})$ $\psi K g_n \rightarrow \psi K g$ in $L^1(\Omega)$.

A tale scopo osserviamo che se $\psi \in C_c^\infty(\bar{\Omega})$, detto H il supporto di ψ e C un maggiorante di $|\psi|$, si ha:

$$(4.1) \quad \|\psi K g_n(x, y) - \psi K g(x, y)\|_{L^1(\Omega)} \leq C \int_H dx dy \int_{R_2} |k(y, \xi)| |\bar{g}_n - \bar{g}| d\xi.$$

Essendo $k(y, \xi) \in L^0(R_0^+ \times R_2)$ si ha che:

$$(4.2) \quad |k(y, \xi)| \leq C, \quad \forall y \in R_0^+ \text{ e } \xi \in R_2$$

Poichè $\bar{g}_n - \bar{g} \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}'(R_2)$ si ha:

$$(4.3) \quad \varepsilon > 0 \quad \exists v_\varepsilon \in N : n > v_\varepsilon \implies \|\bar{g}_n(\xi) - \bar{g}(\xi)\| < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

Dalle (4.1), (4.2) e (4.3) si deduce che K è continuo da $C_c^\infty(\partial\Omega)$ in $L_{loc}^1(\bar{\Omega})$ da ciò segue che K è continuo da $C_c^\infty(\partial\Omega)$ in $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$.

Ciò premesso, osserviamo che per dimostrare il teorema, essendo $C_c^\infty(\partial\Omega)$ unione dei $C_c^\infty(H)$ al variare di H tra i compatti contenuti in $\partial\Omega$, si deve far vedere che K è continuo da $C_c^\infty(H)$ in $C^\infty(\bar{\Omega})$ $\forall H \subset \partial\Omega$.

Essendo $C_c^\infty(H)$ e $C^\infty(\bar{\Omega})$ spazi di Fréchet, basterà far vedere che $\forall H \subset \partial\Omega$ il grafico della restrizione di K a $C_c^\infty(H)$ è chiuso.

In altri termini per dimostrare il teorema basterà far vedere che:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} g_n &\rightarrow g \text{ in } C_c^\infty(H) \\ K g_n &\rightarrow g' \text{ in } C^\infty(\bar{\Omega}) \end{aligned} \implies g' = K g.$$

A tale scopo si osservi che $(K g_n \rightarrow g' \text{ in } C^\infty(\bar{\Omega})) \implies (K g_n \rightarrow g' \text{ in } \mathcal{D}'(\bar{\Omega}))$; d'altra parte, essendo K continuo da $C_c^\infty(\partial\Omega)$ in $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$, si ha anche che $(g_n \rightarrow g \text{ in } C_c^\infty(H)) \implies (K g_n \rightarrow K g \text{ in } \mathcal{D}'(\bar{\Omega}))$. Per l'unicità del limite segue la (4.4). Il teorema è così dimostrato.

TEOREMA 4.2

L'operatore $\gamma_0 K - I$ è prolungabile in un operatore lineare e continuo di

$\mathcal{L}'(\partial\Omega)$ in $C^\infty(\partial\Omega)$.

Dim. Osserviamo che $\forall g \in C_c^\infty(\partial\Omega)$ risulta :

$$\gamma \circ K(g) - I(g) = \int_{R_2} e^{ix\xi} (k(0,\xi) - 1) \hat{g}(\xi) d\xi.$$

D'altra parte per le (3.4) si ha :

$$\begin{aligned} (4.5) \quad k(0,\xi) - 1 &= \psi_1(\xi) \chi(|\xi|) k'(0,\xi) + \psi_2(\xi) k''(0,\xi) - 1 = \\ &= \psi_1(\xi) \chi(|\xi|) k'(0,\xi) + \psi_2(\xi) \chi\left(\frac{|\xi|}{\lambda_0}\right) k_0(0,\xi) - 1 = \psi_2(\xi) \chi\left(\frac{|\xi|}{\lambda_0}\right) + \psi_1(\xi) \chi(|\xi|) - 1 = 0 \end{aligned}$$

per $|\xi| \geq \lambda_0$

Essendo $k(0,\xi) - 1 \in C^\infty(R_2)$, dalla (4.5) si deduce che l'operatore $\gamma \circ K - I$ è un operatore pseudodifferenziale standard con simbolo appartenente a $S^{-\infty}(\partial\Omega)$; quindi, come è noto, è un operatore regolarizzante e cioè è prolungabile in un operatore lineare e continuo di $\mathcal{L}'(\partial\Omega)$ in $C^\infty(\partial\Omega)$ (cfr. [4]).

LEMMA 4.1

Sia $m \in \mathbb{R}$ e $a(y,\xi) \in L^m(R_0^+ \times R_2)$, si consideri l'operatore A di $C_c^\infty(\partial\Omega)$ in $C^\infty(\bar{\Omega})$ definito dalla posizione :

$$Ag(x,y) = \int_{R_2} e^{ix\xi} a(y,\xi) \hat{g}(\xi) d\xi$$

Allora per ogni $s \in \mathbb{R}$ A è prolungabile in un operatore lineare e continuo di $H_s^s(\partial\Omega)$ in $H^{s-m}(\Omega)$.

Per la dimostrazione di tale lemma basta rifarsi ai procedimenti impiegati da Boutet De Monvel in [1] (cfr. pag. 273); tenendo conto che qui le maggiorazioni verificate dal simbolo a sono uniformi rispetto a y e indipendenti da x , e quindi lo spazio di arrivo è H^{s-m} in luogo di H_{loc}^{s-m} .

LEMMA 4.2

Nelle stesse ipotesi del lemma precedente, l'operatore A è prolungabile in

un operatore lineare e continuo di $H_C^s(\partial\Omega)$ in $H_{Loc}^s(\Omega)$ $\forall s, s' \in \mathbb{R}$.

Dim. Basta osservare che $\forall \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$, posto $h(y, \xi) = \psi(y)a(y, \xi)$, essendo $a(y, \xi) \in L^\infty(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_2)$, si ha che $p, q, m' \in \mathbb{N}_0$ esiste $C > 0$ tale che

$$|y^{p+m'} \partial_y^q h(y, \xi)| \leq C(1+|\xi|)^{m-\frac{p+m'}{2}+q} \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}_2;$$

di qui tenendo conto che $h(y, \xi)$ è nulla per y che varia in un intervallo del tipo $]-\infty, \delta[$ con $\delta > 0$, si deduce facilmente che $\forall p, q, m' \in \mathbb{N}_0$ esiste $C > 0$ tale che

$$|y^p \partial_y^q h(y, \xi)| \leq C(1+|\xi|)^{m-\frac{p}{2}-\frac{q}{2}+q} \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}_2.$$

Osservato ciò, basta procedere come in (1).

E' banale la seguente:

PROPOSIZIONE 4.1

L'operatore PK_1 si può prolungare in un operatore lineare e continuo di $\mathcal{E}'(\partial\Omega)$ in $C^\infty(\bar{\Omega})$.

PROPOSIZIONE 4.2

L'operatore PK_2 si può prolungare in un operatore lineare e continuo di $\mathcal{E}'(\partial\Omega)$ in $C^\infty(\bar{\Omega})$.

Dim. Derivando sotto il segno di integrale, si ha:

$$PK_2 g = \int_{\mathbb{R}_2} e^{ix\xi} \tilde{h}(y, \xi) \tilde{g}(\xi) d\xi$$

$$\text{con: } \tilde{h}(y, \xi) = Lk_2(y, \xi) + y^2 \xi_2^2 k_2(y, \xi) \quad \text{ed} \quad L = \xi_1^2 + D_y^2.$$

Essendo ora:

$$k_2(y, \xi) = \psi_2(\xi) k''(y, \xi) = \psi_2(\xi) \sum_{r \geq 0} \chi\left(\frac{|\xi|}{\lambda}\right) k_{-2r}(y, \xi),$$

risulta:

$$\tilde{h}(y, \xi) = \sum_{r \geq 0} \psi_2(\xi) \chi\left(\frac{|\xi|}{\lambda_r}\right) (Lk_{-2r} + y^2 \xi_2^2 k_{-2r}) = \sum_{r \geq 0} \tilde{h}_{-2r+2}$$

con :

$$(4.6) \quad \begin{cases} \tilde{h}_2 = \psi_2(\xi) \chi\left(\frac{|\xi|}{\lambda_0}\right) Lk_0 \\ \tilde{h}_0 = \psi_2(\xi) \left(\chi\left(\frac{|\xi|}{\lambda_1}\right) Lk_{-2} + y^2 \xi_2^2 \chi\left(\frac{|\xi|}{\lambda_0}\right) k_0 \right) \\ \tilde{h}_{-2r+2} = \psi_2(\xi) \left(\chi\left(\frac{|\xi|}{\lambda_r}\right) Lk_{-2r} + y^2 \xi_2^2 \chi\left(\frac{|\xi|}{\lambda_{r-1}}\right) k_{-2r+2} \right) \quad r \geq 1 \end{cases}$$

Per le (4.6) risulta $\tilde{h}_{-2r+2} = 0$ per $|\xi| \geq \lambda_r \quad \forall r \in \mathbb{N}_0$ e quindi $\tilde{h}_{-2r+2} \in \Sigma^{-\infty}(R_0^+ \times R_2)$ $\forall r \in \mathbb{N}_0$.

Se ne deduce che $\tilde{h} \in \Sigma^{-\infty}(R_0^+ \times R_2)$. Dal Lemma 4.1 segue allora che l'operatore PK_2 si può prolungare in un operatore lineare e continuo da $H_C^S(\partial\Omega)$ in $H^{S-m}(\Omega)$ $\forall s \in \mathbb{R}$.

Essendo $\mathcal{C}'(\partial\Omega) = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} H_C^s(\partial\Omega)$ e $C^\infty(\bar{\Omega}) \supset \bigcap_{m \in \mathbb{R}} H^{S-m}(\bar{\Omega})$, si ha che PK_2 si può prolungare in un operatore lineare e continuo di $\mathcal{C}'(\partial\Omega)$ in $C^\infty(\bar{\Omega})$.

Dalle Proposizioni 4.1 e 4.2 segue il :

TEOREMA 4.3

L'operatore PK si può prolungare in un operatore lineare e continuo di $\mathcal{C}'(\partial\Omega)$ in $C^\infty(\bar{\Omega})$.

Dai Lemmi 4.1 e 4.2 si deducono le proposizioni:

PROPOSIZIONE 4.3

Per ogni $s \in \mathbb{R}$ l'operatore K è prolungabile in un operatore lineare e continuo di $H_C^s(\partial\Omega)$ in $H^s(\Omega)$. Inoltre K è prolungabile in un operatore lineare e continuo di $\mathcal{C}'(\partial\Omega)$ in $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$.

Dim. Ricordiamo che $\forall g \in C_c^\infty(\partial\Omega)$ risulta :

$$Kg = \int_{R_2} e^{ix\xi} k(y, \xi) \hat{g}(\xi) d\xi \quad \text{con } k \in \Sigma^0(R_0^+ \times R_2).$$

Conseguentemente per il Lemma 4.1 K si può prolungare in un operatore lineare e continuo di $H_C^s(\partial\Omega)$ in $H^s(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\bar{\Omega}) \quad \forall s \in \mathbb{R}$.

Risultando $\mathcal{E}'(\partial\Omega) = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} H_C^s(\partial\Omega)$ in senso algebrico e topologico, resta anche dimostrato che K è prolungabile in un operatore lineare e continuo di $\mathcal{E}'(\partial\Omega)$ in $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$.

PROPOSIZIONE 4.4

L'operatore K si può prolungare in un operatore lineare e continuo di $\mathcal{E}'(\partial\Omega)$ in $C^\infty(\bar{\Omega})$

Dim. Per il Lemma 4.2, per ogni s e $s' \in \mathbb{R}$, K si può prolungare in un operatore lineare e continuo da $H_C^s(\partial\Omega)$ in $H_{loc}^{s'}(\Omega)$.

Essendo $\mathcal{E}'(\partial\Omega) = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} H_C^s(\partial\Omega)$ e $C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{s' \in \mathbb{R}} H_{loc}^{s'}(\Omega)$, resta dimostrato l'asserto.

Dalle queste ultime proposizioni segue banalmente il :

TEOREMA 4.4

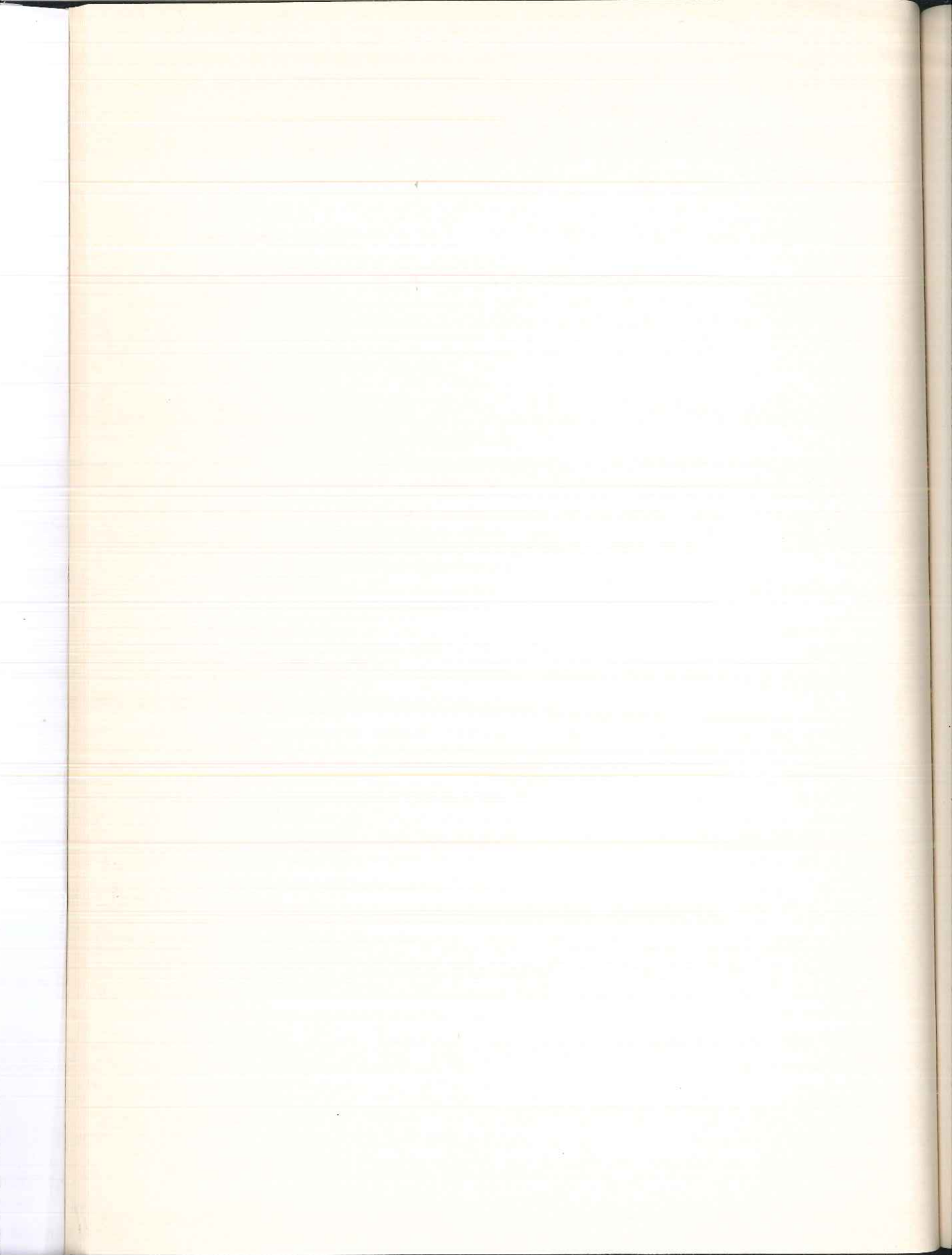
L'operatore K è prolungabile in un operatore lineare e continuo di $\mathcal{E}'(\partial\Omega)$ in $\mathcal{D}'(\bar{\Omega}) \cap C^\infty(\bar{\Omega})$.

Dai Teoremi 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 si deduce che l'operatore K è un operatore di Poisson per l'operatore P in .

Bibliografia

- (1) BOUTET DE MONVEL " Comportement d'un opérateur pseudo-différentiel sur une variété à bord II Pseudo-noyau de Poisson " Journal d'Analyse Math. 17(1966)

- {2} CHAZARAIN-PIRIOU " *Introduction to the theory of linear partial differential equations* " North-Holland (1982)
- {3} C. MIRANDA " *Istituzioni di Analisi funzionale lineare* " UMI (1978)
- {4} F. TREVES " *Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operator* " Plenum Press (1980)
- {5} F. G. TRICOMI " *Funzioni ipergeometriche confluenti* " Cremonese Roma (1954)



EVOLUTION OF A MIOCENE CARBONATE OPEN SHELF FROM INCEPTION TO DROWNING: THE CASE OF THE SOUTHERN APENNINES

Nota di: L. SIMONE, G. CARANNANTE (*).

Presentata dal socio ordinario BRUNO D'ARGENIO

Adunanza del 14-12-85.

ABSTRACT

Drowned carbonate sequences, Early Miocene in age, largely crop out in the Southern Apennines (Southern Italy).

In these sequences the basal limestones rich in bryozoans and coralline algae forming rhodolites, change into hemipelagic muds passing through an interval rich in phosphatic and glauconitic grains, locally with hard-grounds.

The basal limestones, known in the Italian literature as "Calcari a Briozoi e Litotamni" (Bryozoa and Lithothamnium Limestones, "BLL"), are made up by biogenic constituents among which very abundant are bryozoans, coralline algae, benthic foraminifera and pelecypods; other significant skeletal components are echinoids, barnacles, serpulids and planktonic foraminifera.

Lack of characteristic constituents of recent tropical carbonate sediments as micrite, pellets, ooids or green algae and hermatypic corals, (Chlorozoan Association, Lees, 1975) evidence the inadequacy of the tropical model (e.g. Florida-Bahamas) to interpret the sedimentary features of the BLL and enhances their attribution to a Foramol-type Association (Lees, 1975) widely distributed along the subtropical-temperate open shelf areas.

In particular the BLL may be compared with the loose bioclastic sediments of the Fonds Détritique Côtiers of the Mediterranean Sea, described by Peres and Picard (1964), which are constituted by skeletal fragments up to 80% deriving from bioerosional (boring and fragmenting) activity on living communities of circalittoral areas (e.g. Biocenose du Coralligène de Plateau, Peres and Picard, 1964) as well as by other skeletal fragments carried in from adjacent infralittoral areas (e.g. Biocenose de l'Herbier de Posidonies,

(*) Dipartimento di Scienze della Terra; Largo San Marcellino N° 10, Napoli.

Peres and Picard, 1964).

The phosphatic and glauconitic interval is formed essentially by bioclastic sediments which underwent an early marine diagenesis during a long exposure to the water-sediment interface.

This part of the sequence may be considered a palimpsest interval, whose sediments, later covered by hemipelagic marls formed a sheet of relict sediments. The latter may be compared to the fossil sediments of the Fonds Dètritiques du Large (see Peres and Picard, 1964) which cover large areas of the outermost Mediterranean continental shelf, at depth exceeding 90-100 m.

Presence of upwelling, nutrient rich, cold water impinging on the outermost shelf is inferred from the phosphatization which affected the bioclastic sediments during the non depositional stage following the BLL deposition and preceding hemipelagic deposition.

Furthermore, upwelling phenomena might have affected this outer shelf even prior such phosphatization during deposition of BLL, resulting in environmental conditions prone to the Foramol-type Associations, also in those domains where generally the tropical Chlorozoan-type Associations were developing.

RIASSUNTO

Sequenze carbonatiche basso mioceniche, mostrandoci chiare evidenze di anegamento, affiorano estesamente nell'Appennino Meridionale.

In queste sequenze i calcari basali ricchi in briozoi ed alghe coralline evolvono a fanghi emipelagici passando attraverso un intervallo ricco in grani fosfatici e glauconitici, localmente caratterizzato da hard-grounds.

I calcari basali (Calcari a Briozoi e Litotamni Auct., "BLL") sono costituiti da elementi biogeni tra cui abbondantissimi i briozoi, le alghe coralline, i foraminiferi bentonici ed i lamellibranchi; altri componenti significativi sono gli echinidi, i balanidi, i serpulidi ed i foraminiferi planctonici.

La mancanza di costituenti caratteristici dei sedimenti carbonatici attuali delle aree tropicali, quali micrite, pellets, ooidi, alghe verdi e coralli

ermatipici, (Associazione di tipo Chlorozoan, Lees, 1975) mette in evidenza l'inadeguatezza del modello tropicale del tipo Florida-Bahamas per interpretare i caratteri sedimentari dei BLL e spingono ad attribuirli ad Associazioni di tipo Foramol (vedi Lees, 1975) largamente distribuite lungo le aree di piattaforma aperta di tipo subtropicale-temperato.

In particolare i BLL possono essere paragonati ai sedimenti circalittorali dei Fondi detritico-costieri, descritti da Peres e Picard (1964), che sono costituiti da bioclasti derivanti (fino all'80%) dall'attività bioerosiva di comunità viventi nelle aree circalittorali (p.e. Biocenose du Coralligène de Plateau, Peres e Picard, 1964), così come da altri bioclasti provenienti dalle adiacenti aree infralittorali (p.e. Biocenose de l'Herbier de Posidonies, Peres e Picard, 1964).

L'intervallo fosfatico e glauconico é formato essenzialmente da sedimenti bioclastici che subirono una diagenesi marina precoce durante una lunga esposizione all'interfaccia acqua-sedimento.

Questa parte della sequenza può essere considerata come un intervallo palinsesto, i cui sedimenti, in seguito coperti da marne emipelagiche, formarono una coltre di sedimento relitto. Questi ultimi sedimenti possono essere paragonati ai sedimenti fossili dei Fonds Détritiques du Large (vedi Peres and Picard, 1964) che coprono vaste aree della parte più esterna della piattaforma continentale del Mediterraneo, a profondità superiore ai 90-100 m.

La fosfatizzazione, che ha caratterizzato la fase non deposizionale, fa ipotizzare l'esistenza di fenomeni di upwelling a causa dei quali masse d'acqua tendenzialmente fredde e ricche in nutrienti venivano a gravare sul margine più esterno della piattaforma. Possibili fenomeni di upwelling già precedentemente attivi durante la deposizione dei BLL, potrebbero aver contribuito inoltre a creare le condizioni favorevoli allo sviluppo di associazioni di tipo Foramol anche in aree latitudinalmente compatibili con associazioni di tipo Chlorozoan.

1 - INTRODUCTION

Cenozoic times are characterized throughout the world by large diffusion of bryozoans and coralline algae, frequently forming rhodolite rich sediments. Although these sediments are almost completely composed of skeletal fragments, with a nearly 100% calcite content, they cannot be compared with the classical deposits of the tropical platforms, whose model is widely known, because of largely different type of constituents. Several studies on these type of sediments from different localities (Barbera et al., 1978; 1980; Nelson, 1978; Studencki, 1979) have proposed sedimentary areas of temperate environments as a model.

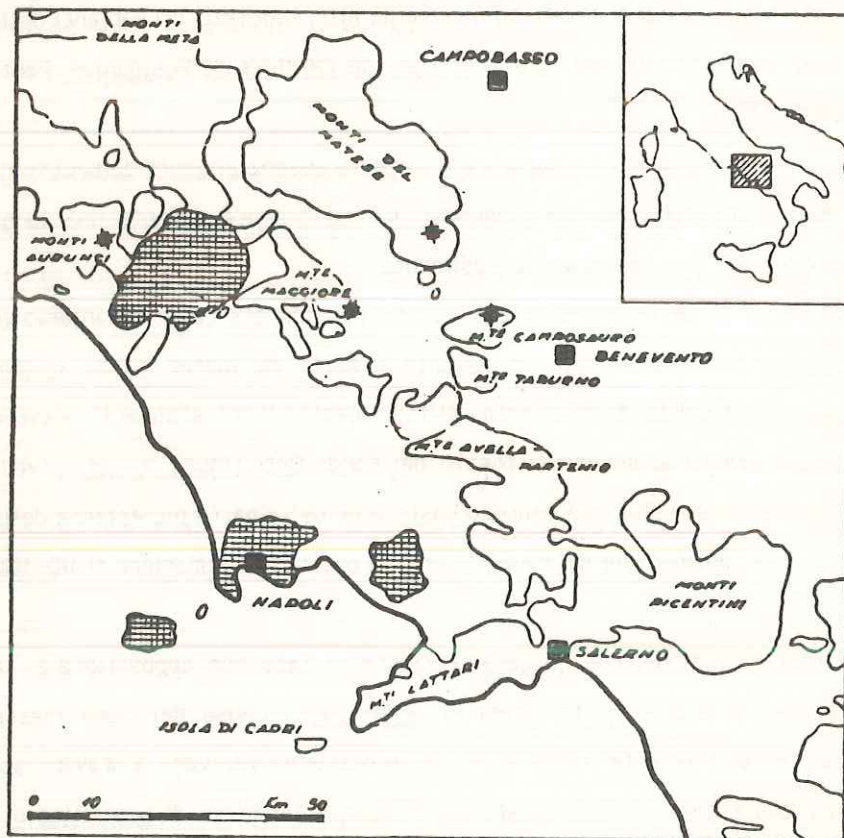


fig. 1. Outcrop areas of BLL in the Southern Apennines.

Aree di affioramento dei BLL nell'Appennino meridionale.

Analogous organogenic limestones, miocenic in age crop out extensively

in the Central and Southern of Apennines Italy (fig.1), with thicknesses ranging from 0 to 50 m and are known as "Bryozoa and Lithothamnium Limestones" (BLL): basic papers relating to their distribution with regional interpretations are those by Selli (1957) and Accordi et al. (1967).

The present work was carried out on Miocene outcrops of Latium-Campania Apennines (fig.1), in areas that are considered as pertaining to the same Mesozoic-Cenozoic paleogeographic domain (Abruzzi-Campania Carbonate Platform, D'Argenio et al., 1975). These Miocene sediments overlap Mesozoic (generally late Cretaceous) shallow water limestones that may be compared with the calcareous sediments at present accumulating in the Florida-Bahama areas (D'Argenio, 1970).

The BLL are essentially constituted of bioclastic elements, almost completely lacking typical components of the tropical carbonate sedimentation areas (Bahamas, Florida, etc.), such as non skeletal grains (peloids, ooids, lumps) and aragonite muds, as well as green algae and hermatypic corals (Chlorozoan Association, Lees, 1975).

For such deposits Barbera et al. (1978, 1980) and Carannante et al. (1981) suggested the colonization by organisms of the Foramol-Type Association (Lees, 1975) of rocky Mesozoic bottoms, during the Miocene trasgressive phase, which followed early tertiary-widespread emersion episodes, and the development of essentially open shelf conditions, characterized by a low rate of sedimentation, which replaced the rimmed shelf conditions typical of the Mesozoic tropical carbonate platforms.

The Miocene sequence, evolves upwards into hemipelagic sediments (fig.2), represented by marly limestones and marls rich in planktonic foraminifera, known in literature as "Orbulina Marls" (OM), Serravallian in age (Selli, 1957). A phosphatic brown or blue-grey level, sometimes more than 1m thick, marks the transition from the BLL to the OM.

2 - CENOZOIC-MESOZOIC OVERLAP

The Cenozoic sediments overlap the Mesozoic substratum with a sharp contact, often marked by stylolitic surfaces.

At many places lithophagous organisms have intensely bored this substratum; judging by dimensions and morphology, the preserved bore-holes are often only a part of previously larger perforations. Fragments of Cretaceous limestone, produced by intensive pelecypod bioerosion, are frequent in the basal levels of the overlapping BLL.

At contact surface in addition to the well preserved pelecypod borings (some shells are still in them) many other smaller borings and traces among which policheta and sponge may be found.

Consequently the Mesozoic limestone may be considered as having been a rocky sea bottom (rock-ground) before the deposition of the Miocene bioclastic calcarenites, repeatedly colonized by lithophagous and sessil organisms (fig. 3).

Calcarenitic filling in the lithophagous borings is sometimes the only evidence of the bioclastic sedimentation preceeding the deposition of the hemipelagic muds, which in this case directly overlap the Mesozoic rocks with intervening reddish-brown surfaces (fig. 3, 4).

3 - BRYOZOA AND LITHOTHAMNIUM LIMESTONES

In the studied region the Bryozoa and Lithothamnium Limestones (BLL) constituted essentially of bioclastic sediments, Burdigalian-Langhian in age (Barbera, 1980), crop out without a well distinct bedding and with a thickness ranging from a few centimeters to 50 m. They show a rather constant biogenic constitution and are, in fact, characterized by fragmented bryozoans colonies and encrusting coralline algae, both fragmented or forming rhodolites associated with pelecypods, often occurring in life

position, arthropods (barnacles and ostracods), echinoids, benthonic foraminifera and, particularly at the top of the BLL, fish-teeths.

The micrite generally is not present and the sediment often shows pseudostylolitic grain to grain contacts. Only in some places (Eastern Aurunci Mountains, fig.1) are the muddy siltitic components at all significant (fig. 8).

Intergranular cements generally are limited to microcrystalline calcite: clear drusy cements are only present in the intragranular cavities and in some large subgranular cavities. Lastly, the overgrowth of syntaxial calcite on echinoid fragments is very frequent.

Only locally (Eastern Aurunci, M.te Camposauro, fig.1) do the coralline algae, associated with bryozoans and sessil foraminifera, form large crusts some decimeters thick and few square meters wide. They may be considered as limited algal ridges undergoing more or less intensive bioerosional processes (fig. 5). Normally the coralline algae (Archeolithothamnium, Lithothamnium, Lithophyllum, Mesophyllum) associated with encrusting foraminifera, and less frequent membraniporiform bryozoans, form rhodolites whose diameter range from a few to a maximum of 20 cm (fig.6).

Among the foraminifera the following have been recognized (Barbera, 1980): Textularia sp., Bigenerina sp., Miliolids, Cyclamina sp., Elphidium sp., Lagenids, Buliminids, Rotalids, Operculina sp., Eterostegina sp., Amphistegina sp., Gypsina sp., Globigerina sp.; Homotrematids as Miniacina sp. and Homotrema sp. also are present.

The planktonic foraminifera are clearly subordinate; occurring only sporadically in the BLL, they increase in number and diversity in the upper part of the sequence, at the transition to the hemipelagic sediments.

The benthic and sessil forms are much more significant. The former, which are very abundant and well preserved, contribute considerably to the sediment. Among them some are ubiquitous, as for example, Amphisteginids, Operculinids (generally limited to the lowermost part of the bioclastic limestones), Textularids and Elphidids, others are strictly localized, like

Myogipsinids which constitute well distinct macroforaminiferal levels in M.te Camposauro (fig.1).

Because of the strong lithification of the sediments, bryozoan colonies could not be isolated easily. Only one association characterized by the constant preponderance of adeoniform and vinculariform bryozoans could be identified in the thin sections (Barbera et al., 1978; 1980). This method did not allow the taxonomic definition of the species. When compared with loose material of analogous age and lithofacies, however, these bryozoans show affinities with sectioned Porella cervicornis, Idmidronea atlantica, etc.

Among the molluscs only the pelecypods (Pectinids and Ostreids) were found, occurring as inarticulated valves, bored probably by Clyonids (Enthobia borings), or forming banks of 20-30 cm thick and extending for about one hundred square meters.

Among the artropods, ostracods and barnacles are present. The latter more abundant were found either fragmented, as rhodolitic nuclei, or growing on rhodolites.

The echinoids occur either as spine and plate fragments or, locally, as whole Echinolampas and Scutella individuals in the finer sediments, generally without rhodolites. Lastly, fish teeth (Teleostea, Selacia) are particularly common at the top of the BLL (Franco, 1960).

Calcite is the primary mineral of the organic components, coralline algae, barnacles, echinoids, serpulids as well as most of many bryozoans and encrusting foraminifera tests are characterized by high Mg-calcite.

The Ostreid and Pettinid shells (the aragonite being present only in the thin prismatic layer of some Pettinids) and the tests of most of the planktonic forms are instead made of low Mg-calcite.

Five main lithofacies may be recognized in the BLL :

1) Rhodolite and/or pelecypod calcirudite in a calcarenitic matrix of bryozoans and coralline algae fragments. The sediment is characterized by rhodolites and large pelecypods inside a calcarenitic matrix similar to the

one in lithofacies 2, or sometimes to that in lithofacies 3 (fig. 6).

In those places where rhodolites or pelecypods became more abundant, the rock gradually changes, forming, respectively, an accumulation of rhodolites, sometimes stabilized by encrusting coralline algae, or banks of Ostreids and Pectinids.

2) Bryozoans and coralline algae calcirudite and calcarenite. The sediment is almost completely made up of skeletal fragments. The muddy matrix is generally missing and grain to grain contacts are often of stylolitic type. Fragmented bryozoans and coralline algae are predominant among the constituents; benthonic foraminifera and bioeroded pelecypod fragments occur in association as well (fig.7).

3) Bryozoans and coralline algae calcirudite and calcarenite in a muddy-silty matrix.

The sediment is made up of skeletal fragments (bryozoans, Holoporella, coralline algae, benthonic foraminifera, echinoids, etc.) with inter- and intragranular cavities filled with a muddy-siltite matrix (fig.8).

4) Coralline algae biolithite. The sediment is made up of encrusting coralline algae, associated with sessil and encrusting foraminifera and bryozoans. The intrabiolithitic cavities are filled with bioclastic sediments with a muddy matrix like the one in lithofacies 3. The way of growing of the encrusting organisms and their relationships with adjacent sediments, make these organically-built structures comparable to algal ridges (fig. 5).

5) Echinoid calcirudite and calcarenite. The sediment is generally made up of fine sand in which small Mesozoic lithoclasts are abundant and echinoid fragments, showing syntaxial overgrowth of calcite, typically occur. Locally the presence of whole organisms (Echinolampas, Clypeaster, etc.) forms an echinoid calcirudite in a calcarenitic matrix.

4 - TRANSITION FROM BRYOZOA AND LITHOTHAMNIUM LIMESTONES TO ORBULINA MARLS

Upwards in the sequence, the BLL generally changes to hemipelagic marly-limestones and marls, through a phosphatic interval with a thickness ranging from only a few to a maximum of 150 cm (fig. 2, interval B). This interval is characterized by the abundant phosphatic (fluoroapatite) grains, subspherical to ellipsoidal in shape, having an average diameter of 2 mm (fig.9). The grains beige or dark brown in colour, after alteration change to dark-gray or bluish, so that the whole level looks brown-greyish and distinguishes clearly from the under and overlying rocks. Anastomosing stylolitic surfaces increase the phosphatic grains packing to such an extent that sometimes the entire level, or some horizons in it, consist of these grains with a scarce muddy matrix. In this interval also the texture is variable. The limestones are made up of calcirudites whose elements, apart from the previously mentioned phosphatic grains, are essentially the same as those forming the underlying BLL (fig.2, interval A). The bioclastic grains show a brown-reddened surface and there is also evidence that the grains have undergone lithification processes previous to the last deposition. The fracture margins within the skeletal fragments offset in fact also their internal sediments. Complex grains, formed by several skeletal fragments, are bound together not only by encrusting organisms but also by micritic cements, bearing witness to early cementation phases in these sediments, for a long time exposed to water-sediment interface (Barbera et al., 1978).

PHOSPHATIC GRAINS

The muddy-siltitic matrix, scarce in the lower part, increases upwards to form a sediment with only a few, scattered, skeletal calcareous fragments and abundant phosphatic grains. Here the planktonic foraminifera (mostly Globigerinids) are very abundant as well as in the overlying hemipelagic

marly limestone (fig.2, interval C). The original nature of the phosphatic grains may often be individuated. Some constituted the filling of planktonic foraminifera, whose internal mold they reproduce exactly, keeping, in some cases, even part of the original test. Phosphatic materials also frequently fill bryozoan internal cavities and macroborings. Most of the phosphatic elements, however, occur as larger elliptical grains, interpreted as fecal pellets (Zalaffi, 1963). We may add that some of the phosphatic grains show size and shape similar to those of the sporangia of the coralline algae. Having often found phosphatized fillings of tallus cavities, we suggest that some phosphatic grains derive from substitution processes on muddy calcareous sediments occluding coralline algae sporangia (Carannante, 1982 b).

Last, some other grains may derive from a gradual alteration of benthonic foraminifera, as reported by Manheim et al. (1975).

GLAUCONITIC GRAINS

The internal filling of planktonic foraminifera constitute almost all the green grains present in the sediment. At moment their mineralogic nature has not been clearly individuated; considering their general characteristics and according to current use in literature, they are reported here generically as glauconitic grains.

Fe-Mn CRUSTS

In the places where the phosphatic interval is missing, brown-reddish crusts (fig. 4) clearly separate the BLL from the OM. Previously reported in literature from several localities of Latium (Bergomi & Damiani, 1978) they have been found in the studied area only in the locality "Civita di Pietraroia", according to Carannante (1982 a), an early Miocene originally channelled area. These crusts range here from few millimeters to 2-3 cm in thickness and coat both Cretaceous limestone surface and macroboring cavities filled by bioclastic sediments. Along the margins of the above paleochannell, where the skeletal sedimentation mostly occurs, the contact between BLL and OM is

sharp, sometimes marked by abundant Ostrea shells, and shows anfractuositities filled with OM. This implies a lithification stage preceeding the OM deposition (Barbera et al., 1978). Hemipelagic sediments fill the channel and are deformed along the margins by slumping.

Neighbour areas are again characterized by the organogenic sedimentation of BLL, even though with a thickness exceeding a few meters; the transition to OM is typically marked by the calcarenitic interval rich in planktonic foraminifera and phosphatic grains.

Upwards in the sequence, the succession changes to thin stratified, marly limestones and marls, which are very rich in planktonic foraminifera (Globigerinids). Burrowing is very common at interbed surfaces.

5 - INTERPRETATION

5.1. ENVIRONMENTAL SIGNIFICANCE OF THE BRYOZOA AND LITHOTHAMNIUM LIMESTONES

Barbera et al. (1978; 1980) have pointed out the lack in the BLL of constituents characteristic of recent tropical carbonate sediments, such as aragonitic micrite, pellets, ooids, lumps, green algae and hermatipic corals. Consequently they pointed out the inadequacy of a tropical rimmed-shelf model of Bahamian type for such sediments. The BLL have been hence interpreted as being laid down in open shelf circalittoral areas (outer shelf) at a depth exceeding 80 m, in waters whose temperature corresponded to that of temperate-subtropical areas. The composition of BLL has been attributed to a Foramol-type Association (see Lees, 1975), widely distributed along the present subtropical-temperate, open shelf areas (Barbera et al., 1978; 1980; Carannante et al., 1981; 1984).

Such kind of sediments are, at present, largely diffused on the continental shelf off Southern Brazil (Milliman & Summerhayes, 1975; Vicalvi and Milliman, 1977; etc.), here because of the low influx of terrigenous

sediments, the middle and outer shelf is widely covered by carbonate sediments. On such areas the particular conditions of the water (salinity, temperature as well as nutrient content) favour the development of a Foramol-type Association. The difference in temperature between the warm Brazil Current and the cold Malvinas Current largely control the distribution of the benthos and, consequently, of the main carbonate grains. So, while benthic temperate-subtropical foraminifera, mollusks and barnacles prevail south of Cabo Frio (23° S), to the North coralline algae, bryozoans and Halimeda dominate the carbonate fraction. In particular, where local upwelling phenomena are found (Victoria Bank, etc.) the cold and nutrient rich waters favour the growth of limited algal ridges.

In the Mediterranean region, similar deposits have been particularly well studied: valuable and accurate descriptions of sediments and living communities have been produced over a time span of a century [noteworthy the papers by Walther (1895) and Walther & Schirnitz (1896)] on the algal sediments of the Bay of Naples as possibly recent counterpart of Miocene rhodolitic sediments of Siracusa, in southeastern Sicily.

These Mediterranean rhodolitic sediments, covering circalittoral bottoms, appear of great interest as already noted by Walther (1895) and recently emphasized by Carannante et al. (1981) because, as a whole, they may be compared with the Miocene Apenninic limestones.

The BLL lithofacies (except lithofacies 4) mostly are made up of sediments comparable with the loose sediments that floor some circalittoral Mediterranean bottoms in areas characterized by strong currents and sciaphyle communities (sediments détritique-meubles of French literature), typical of the Biocenese du Détritique Côtier (see Peres & Picard, 1964) (fig. 11). The Miocene skeletal fragments of the Apennines, often deeply bored, have, in fact the same basic characteristics of the above Mediterranean sediments whose skeletal fragments derive (almost 80%) from bioerosional (boring and fragmentig) activity on living communities of some circalittoral

areas (e.g. Biocenose du Coralligène de Plateau, Peres & Picard, 1964) as well as of adjacent infralittoral areas (e. g. Biocenose de l'Herbier à Posidonies, Peres & Picard, 1964). These detritic sediments because of presence of several endo- and epibionta organisms may show different facies.

So in the BLL, litofacies I, displaying large rhodolites up to 20 cm in diameter (fig.6), coincides with the sediments of present day nodular (rhodolitic) Facies à Pralines of the above Biocenose du Dètritique Côtier (fig.11) This facies is known in circalittoral open shelf areas, especially on banks which are 40-50 m deep, winnoved by strong currents. Such depths in the clearer waters of the Eastern Mediterranean Sea may even exceed 90 m.

Some organisms recognized in the BLL (e.g. some porelliform bryozoans Miriozoum truncatum, etc.) are at present found in the Biocenose du Dètritique Côtier, as well as in the Biocenose du Coralligène de Plateau, from which the skeletal fragments, at least partially, must have derived.

Many epibionta should probably be considered as stalk epifauna of the large phaeophiceae algae which could have locally colonized the same sedimentation area, as currently found in the Mediterranean Facies à Pralines. Indeed the areas with rhodolites (Facies à Pralines) in the Mediterranean Sea, which has sciaphyle characteristics in a regime of strong bottom currents, are frequently covered by Laminaria (Gautier & Picard, 1957). Here, the large brown algae fix their holdfasts on rhodolites and became dwellings of an intensive secondary colonization by epibionta, among which the viculariform bryozoans are particularly abundant (Idmidronea sp., Holopora impressa, etc.).

The abundance of viculariform bryozoans, which in section resemble Idmidronea elements, may be observed in the BLL, where they are slightly less abundant than the porelliform bryozoans (Barbera et al., 1978; 1980).

In the recent circalittoral bioclastic sediments, empty foram tests, carried in from infralittoral areas and partially reworked, generally prevail on the individuals of the few forms living in circalittotal environment. In the

BLL among the latter we may recognize: Textularids (Textularia and few Bigenerina), Buliminids, Anomalinids (Cibicides), few Miliolids and Lagenids; while the remaining forms are represented by forms never found in the recent circalittoral environments as living organisms. They are, essentially benthonic epiphytic macroforaminifera (Amphisteginids, Elphidids, etc.) which might have been carried in as isolated grains and/or fixed on vegetable materials from the nearby sea meadows, like the present Prairies à Fanerogames (see Peres & Picard, 1964).

It is interesting to note how the abundance of the infralittoral Amphisteginids in the circalittoral sediments of the BLL corresponds to the data reported by Blanc-Vernet (1969) for the sediments of the Eastern Mediterranean Sea, where, according to this Author, the Amphistegina penetrated from the Red Sea, after the opening of the Suez Channel. The Author reports how the Amphistegina percentage in the recent sediments reaches maximum values in the circalittoral environments, where the foraminifera are of the same size of other sedimentary grains, bearing witness to a probable passive accumulation after transport. From a percentage of less than 10% in the infralittoral Prairies à Fanèrogame where they live, the Amphisteginids reach a value of 15% in the circalittoral Détritique Côtier, while even the 80% is attained in the Fonde de Passe zones, which are characterized by strong current and often dwell of facies rich in algal concretions (rhodolites).

In the BLL the genus Amphistegina, (wich generally lives as epiphyta on alophila leaves in the infralittoral tropical sea meadows) is particulary abundant and this abundance contrasts with the characteristics, on the whole temperate, of the BLL sediments (e. g. absence of green codiaceae algae, scarcity of Miliolids largely widespread in the circalittoral environments of tropical zones; abundance of barnacles, etc.

Does such anomaly result from a geographic location of the Apenninic Miocene depositional area in a transitional zone from temperate to tropical,

in connection with warmer sea waters, like in the Eastern Mediterranean, or does it have a more complex alternative explication, like the existence of a subtropical-tropical shelf area, undergoing cold currents regime or upwelling cold waters, which may preclude the development of Chlorozoan type-Associations? An example may be found in the Yucatan Shelf (19°-20° North). Here molluscan-algal fragments (Foramol-type sediments), rich in benthonic foraminifera, partially relict, floor the eastern-north eastern part of the shelf, where cold (17°-18° C) upwelling water come from the Yucatan Channel and prevent the development of coral reefs (Logan et al., 1961).

Where phenomena of upwelling take place, the cold waters which impinge on the area cause a thermocline's rise until the bathymetric limit marking the depth where turbulence takes over from Ekman transport (never less than 50m) (Parrish, 1982). Hence a circalittoral outer-shelf area, marginally interested by cold upwelling waters, could have water temperature lower than expected in relation with the geographic location (while infralittoral inner-shelf areas could still have served warmer waters). In this case circalittoral sediments of relative cool water could show bioclasts derived from warmer neighboring infralittoral areas.

In the lithofacies 4, encrusting coralline algae are associated with bryozoans, serpulids and sessil foraminifera to form elongated algal ridges, intensely bored and rising several centimeters above the bottom (fig. 5). They are similar to the algal incrustation common in the present day Biocenose du Coralligène de Plateau (Peres & Picard, 1964) that characterizes some rigid circalittoral bottoms of the Mediterranean Sea (fig. 11). Here the organisms of the Biocenosis of the Coralligène de Plateau colonize either the rocky outcrops of the sea-bed or the concretioned areas stabilized by organisms encrusting originally loose bioclastic sediments.

In the BLL the binding action of coralline algae to form a rigid bottom from loose bioclastic sediments may be observed where more and more thick coralline crusts cover rhodolites, pelecypods and skeletal fragments.

In the Eastern Aurunci Mountains (fig. 1), where the lithofacies 4 (algal ridges) is associated with rhodolite deposits (lithofacies 1 and 3) whose matrix shows abundant microsilicic fraction. Here are also present, among the bryozoans, the cellular poriforms (Holoporellids), whose zoarial form seems related to their capacity to live in an habitat characterized by the presence of muddy fraction in the sediment.

Consequently we may postulate within the Miocene bioclastic bottoms a complex morphology, where slightly higher areas, forming little ridges, were colonized by sessile and encrusting organisms and circumscribed lower and more quiet areas where muddy-silicic sediments were deposited.

Last we note here that only lithofacies 4 can be well compared with the recent hard bottoms of the Biocenose du Coralligène de Plateau, whilst other Authors tend to compare all rhodolitic coralline sediments, like our lithofacies 1, 2, and 3, with a generic Coralligène or with the Mediterranean Coralligène du Plateau (Studencki, 1979; Bosence, 1983; Bosence & Pedley, 1982).

5. 2. RELICT SEDIMENT

The phosphatic interval (fig. 2, interval B) occurring at the transition from BLL to OM is a key to the interpretation of the studied sequences, coexisting in it materials which derive from different depositional environments. Skeletal fragments and phosphatic peloids form its framework; moreover more and more abundant planktonics (mostly Globigerinids) in muddy matrix occur upwards, grading into the overlying OM (fig. 2, interval C). If attention is focused on the coarser carbonate grains, it can be seen how similar they are to those of the underlying BLL (fig. 7 and 9). The phosphatic interval may be considered, in fact, in its lower part as the top of the BLL; it is only the enrichment in phosphatic grains and the increasing matrix rich in planktonic foraminifera that allows to individuate it.

The carbonate grains are bioclasts more or less corroded, coated by reddish film and normally showing evidence of previous diagenetic change.

This occurred during a relatively long time interval when the sediments were exposed to the water-sediment interface with scarce or no sedimentation. Thus the skeletal fragments remained on the sea bed forming a relict detritus, because changed bathymetric and hydrologic conditions prevented the organisms which characterized the BLL environments to develop further (Carannante et al., 1984). Analogous situations probably during the Pleistocene gave origin to the "Fondes Detritiques-meubles du Large" of the French Authors (Peres & Picard, 1964; Blanc Vernet, 1969) which in the Mediterranean Sea, constitute the deeper horizon of the circalittoral environment, at depths that exceed 90-100 m and reach the upper part of the continental slope (fig.11,12). These sediments bear witness of a fossil detritic bottom, no longer balanced with the present bathymetry because of their deposition during the last stages of eustatic lowering of sea level. The grains now corroded, frequently limonitized or glauconitized, support the existence of ancient sea-beds characterized by sediments of the Détritique Côtier biocenosis.

Similar sediments are also reported on the Brazilian shelf (Kempf, 1970), where the transition from the Détritique Côtier type sediments, which are characterized by low percentage of living organisms, to the marginal shelf relict sediments may be gradual, as related to environmental conditions that became unfavourable to the communities, until they gradually disappeared.

5. 3. EARLY SUBMARINE DIAGENESIS

The sediments of BLL during their accumulation were progressively stabilized and perhaps partially cemented. Barbera et al. (1978) suggest that an incipient cementation occurred in the stabilized sediments immediately below the more superficial mobile levels, while the sea waters were forced into the pore system of the underlying stabilized sediments through the loose sediments. A calcitic cement was then precipitated.

Under changed environmental and hydrological conditions, and at increasing depth, only the topmost level, left unburied and no longer "fixed", was for a

long time exposed to the water sediment interface.

It became a set of P enrichment processes and subsequently a place for the accumulation of hemipelagic sediments, so generating a palimpsest sediment (sensu Swift et al., 1971).

PHOSPHATIC GRAINS

The selective phosphatization of some grains appears to be the most characteristic element of the diagenetic environment in the time interval following the deposition of the bioclastic sediments (BLL) and preceding the globigerinids muds (OM).

While attempting to throw light on the possible factors contributing to phosphate formation, we must bear in mind that the only zones in which, as far as we know, phosphates are now widely forming are those of Peru-Chile and Southwestern Africa shelves, both areas of intensive upwelling (Summerhayes et al., 1978; Baturin, 1982). On the uppermost part of the Peru-Chile continental slope very low values of dissolved oxygen (due to the upwelled cold waters) are found and, at the periphery of the O_2 -minimum zone, a gradual substitution of many Holocene benthonic foraminifera (Bulivina, Uvigerina, Cassidulina, etc.) with apatite takes place until the complete loss of their morphological characteristics (Manheim et al., 1975).

According to these Authors and in agreement with Baturin (1973), the phosphatization of carbonate grains starts in the anoxic environment of the interstitial water, which is richer in phosphates than the water overlying the sediments. The abundance of dissolved phosphates probably derives from decaying organic matter which, in a low-oxygen environment, besides supplying phosphorous, lowers the pH and promotes the $CaCO_3$ supersaturation, thus leading to the precipitation of phosphates in favourable environments (Kramer, 1964).

It is now interesting to note how some areas of upwelling waters and consequent high productivity, are not in anoxic conditions because a deep oxygen supply often may equal the oxygen consumption (Demaision & Moore,

1980). In those cases neither phosphate, nor preservation of organic matter in the bottom sediments are to be expected. Summerhayes et al. (1976) indeed report areas of upwelling near the coast and over the offshore banks on the SE Brazilian shelf where nutrient rich, cold waters, containing up to 6 ml/l of dissolved oxygen, encourage the blow of encrusting red algae (Melobesids) to build extensive algal ridges.

High growth-rate and blowing of brown algae (Laminaria) are also reported on the coast off California, where to an intensive upwelling of nutrient rich cold water do not correspond low values of the dissolved oxygen in the shallow inner shelf (Woster & Reid, 1963) because the oxygen minimum ($-0,5$ ml/l) layer impinges limitedly on the slope between 300 and 1200 m (Demaison & Moore, 1980). It is also interesting to note that in the photic zone, corresponding to more shallow and turbulent waters (only laterally interested by upwelling) some organisms use the phosphorous (red algae and bryozoans are particularly P-rich, Milliman, 1974). In the meantime the waters where photosynthesis occurs become richer with dissolved oxygen.

Finally in areas with upwelling waters abundance of fishes has been often reported. Also the BLL, in their upper part, are particularly rich in fish teeths (Franco, 1960; Carannante, 1982, a, b).

From above considerations we presume that in the Miocene bioclastic sediments (still well oxygenated and only marginally influenced by upwelling nutrient rich cold waters) the phosphorus may have been concentrated in the tissues of organisms, like coralline algae.

While depth increased, the living organisms; gradually disappeared and a sheet of relict sediments was then formed. The latter because of a further deepening or because of an enlargement and/or lateral shifting of the anoxic levels connected with upwelling maximum, remained a long time exposed to the nutrient rich and oxygen-poor waters. In such conditions the phosphorous of the interstitial waters concentrates in particularly favourable micro environments, like foraminifera tests, fecal-pellets or also micritic filling of intragranular cavities. Among these, particular importance have the

sporangia of coralline algae, whose tissues, extremely rich in phosphates, during the decaying of the organic matter, favour largely the P_2O_5 enrichment of the interstitial waters. Furthermore, sporangic cavities produce favourable loci for the phosphorous nucleation on the calcite microcrystals of the micritic filling (Carannante, 1982, b).

GLAUCONITIC GRAINS

Further evidence of a non active sedimentation phase at transition from the bioclastic calcarenites to the hemipelagic muds is given by scattered glauconitic grains. They are well comparable with those of the green grains marine facies defined by Odin & Matter (1981) as Glaucony. According to these Authors Glaucony facies at present develop, in open marine conditions on continental shelves (outermost part of the shelf and/or upper slope) and on oceanic highs, at water depth ranging from 50 to 500 m, with an optimum between 200 and 300 m. Green grains are also reported by Peres & Picard (1964) in the relict sediments of the Biocenose du detritique du large that in the Mediterranean Sea cover the external part of the shelf at water depth exceeding 90-100 m. They require bottom exposed for long times at sediment-sea water interface. Suitable substrata (e.g. filling of foraminifera tests, fecal pellets, etc.) are also required and such "microenvironments" should be in partial chemical isolation from sea water ("semiconfinement" in Odin & Matter, 1981).

REDDENED GRAINS

Bioclasts with reddish surfaces are quite common at transitional interval. Marshall & Cook (1980) report in the phosphorous rich nodules from East Australian shelf reddish goethitic grains and glauconitic grains. According to the Authors, this coexistence may be, in part, the result of oxidation of glauconite to goethite; however, further evidence is required to confirm this hypothesis.

Oxidated glauconitic grains are also reported by Burnett (1980) from

apatite and glauconite rich sediments of coastal upwelling areas off Peru-Chile. According to this Author the same occurrence of glauconite and its progressive oxidation appears to be related to the change from waters with a well developed oxygen minimum, optimum for apatite formation, to waters with progressively more dissolved oxygen. A probable lateral shifting and/or a contraction of the oxygen minimum layer, caused by a shift of the maximum upwelling locus, as controlled by climatic variations is claimed by Burnett (1980).

We may hence suggest that the Miocene bioclastic sediments have developed at first in conditions favourable to form phosphatic grains, because they were covered by peripheral bodies of nutrient rich and low oxygen waters. Eventually the lateral shifting of the active upwelling and the consequent reduction of oxygen minimum, may have led to development of glauconitic grains. Finally, when dissolved oxygen increased, the glauconitic grains may have been oxidized to goëthite.

Fe-Mn CRUSTS

Iron- manganese crusts, separating the bioclastic sediments from the hemipelagic carbonate muds were previously interpreted by Bergomi & Damiani (1978) and Carannante (1982, a) as evidence of a non depositional stage. The chemical conditions under which Fe-Mn crusts form are not well known, even though it appears clear that peculiar relationships between water and sediments are needed for their genesis.

Campbell (1982) describes Fe-Mn crusts occurring in the phosphatic deposits on the shelf and upper slope off NE Brazil, where the dissolved oxygen values are high (Xavier, 1982). In this case the Fe- Mn crusts should represent, respect to phosphatic deposits, a distinct diagenetic phase developed in different redoxing condition, as well as the glauconitic and goëthitic grains described by Burnett (1980) in the sediments of the Peru-Chile shelf and slope. Besides the redoxing conditions, low sedimentation rates, associated with a strong current regime, are needed to

form the Fe-Mn crusts. But they need chiefly the presence of hard substrata represented on the Miocene sea-bed by the Cretaceous rock ground, deeply bored by lithophagous organisms like those of the channeled area of Pietraroia Carannante (1982, a) or by the hard-grounds at the top of bioclastic calcarenites, partially cemented by microcrystalline calcite and/or stabilized by encrusting organisms.

6 - DISCUSSION

The Miocene carbonate deposition of the surveyed areas of Southern Apennines started on a carbonate shelf with bioclastic sediments rich in coralline algae, bryozoans, molluscs and benthonic foraminifera, accumulating at very low rate of about 10m/Ma (Barbera and al., 1980). The skeletal grain association of the Miocene "Bryozoa and Lithothamnium Limestones" point out a Foramol type sediment (see Lees, 1975); even if Foramol appears a definition not completely suitable because of the prevalence of coralline algae and bryozoans over foraminifera and molluscs.

Carbonate sedimentation areas, characterized by Foramol-type Associations, are typical of temperate-subtropical regions but may also form in subtropical-tropical regions where salinity and temperature of the water, lack of suitable substrata, etc. preclude the development of Chlorozoan Associations (Lees, 1975).

Hence climatic and/or latitudinal implication cannot be automatically inferred by the finding, in the Miocene carbonate open shelves of the Southern Apennines, Foramol-type sediments. In this view, upwelling cold waters impinging on the outermost shelf, during the non depositional stage in which phosphatic grains were formed on the top of the calcarenitic relict deposits, might suggest that, even previously, during the deposition of the bioclastic sediments, this circalittoral outer shelf area might have been marginally interested by upwelling, nutrient rich, cold water.

The BLL limestones, accumulated over circalittoral bottom on open shelf areas, in water whose temperature, and not necessarily latitude, corresponded to that of temperate seas. Such limestones are in particular well comparable to the loose bioclastic sediments which floor some circalittoral bottoms in the Mediterranean Sea (Sediments à Pralines of the Biocenose du Detritique Côtier of French Authors) (Carannante et al., 1981).

During a non depositional period, they underwent diagenetic processes (formation of phosphatic and glauconitic grains, hard-grounds, etc.) probably in connection with cold and nutrient rich upwelling water, and subsequently were covered by the carbonate hemipelagic muds (OM).

The top of the bioclastic sequence may be, hence, considered as a palimpsest interval (sensu Swift et al., 1971) whose bioclastic fractions, formed a sheet of relict sediments well compable with the fossil sediments of the Fonds Detritique du Large (see Peres & Picard, 1964). Such sediments, in the present Mediterranean Sea, cover large areas of the outermost continental shelf, at depth exceeding 90-100 m.

On the whole the sedimentary sequence of the BLL testifies the drowning of a Miocene carbonate platform in conditions of relative rising of the sea level.

Ancient and recent temperate open shelves, characterized by the same Foramol-type associations, show relict or palimpsest sediments followed by hemipelagic deposits in cosequence of their low rate of growth, largely controlled by the water temperature.

According to Barbera and al. (1980) the growth rate of Southern Apennine Miocene temperate shelf limestones is of about 10 m/Ma, similar rates of 10-20 m/Ma are reported by Nelson (1978) for analogous Cenozoic sediments from New Zealand. Such values strongly contrast with the known data on the growth rates of recent tropical rimmed shelves (Schlager, 1981) or their Mesozoic counterparts (D'Argenio, 1970; 1974) and agree with the lower rates of the recent temperate open shelves reported by Nelson and al. (1982;

1983) and also previously suggested (e. g. Ginsburg and James, 1975).

All these open-shelf carbonate areas may be considered as carbonate platforms which may drown, even if healthy.

Carbonate tropical shelves, essentially because of variations in the water temperature and/or salinity, may show Foramol-type Associations. Such cooler tropical shelves too have a low rate of sedimentation and show relict and/or palimpsest sediments. They may be easily drowned even if Chlorozoan-type Platforms, at same latitude, are able to keep pace with the sea level rise.

ACKNOWLEDGEMENTS

We thank prof. B. D'Argenio for critically reading the manuscript and P. La Brocca for his technical help.

BIBLIOGRAPHY

- ACCORDI B., DEVOTO G., LA MONICA G. B., PRATURLON A., SIRNA G. & ZALAFFI M. (1967)** - Il Neogene nell'Appennino Laziale-Abruzzese. Comit  e Mediterranean Neogene Stratigraphy. Proc. IV Session, Bologna; Giorn. Geologia, **35**: pp. 235-268 (1969) Bologna.
- BARBERA C. (1979)**
Lamellibranchi miocenici della "Formazione di Cusano" (1957) provenienti da Cusano Mutri (Matese Orientale, Benevento). Boll. Soc. Natur. Napoli: pp. 193-211, Napoli.
- BARBERA C., CARANNANTE G., D'ARGENIO B. & SIMONE L. (1978)**
Open shelf miocenic carbonates and evidence of paleofaults in Southern Apennines. VI* Internat. Meeting of Carbonate Sedimentologists, 3-7 January 1978 (Abstracts with programs, p. 2), Liverpool.
- BARBERA C., SIMONE L. & CARANNANTE G. (1978)**
Depositi circolittorali di piattaforma aperta nel Miocene Campano. Analisi sedimentologica e paleoecologia. Boll. Societ   Geologica Italiana, **97**: pp. 821-834.
- BARBERA C., CARANNANTE G., D'ARGENIO B. & SIMONE L. (1980)**
Il Miocene calcareo dell'Appennino meridionale: contributo della paleoecologia alla costruzione di un modello ambientale. Annali Universit   di Ferrara (N.S.) Sez. IX, **6**: pp. 281-299.
- BATHURST R. G. C. (1975)**
Carbonate sediments and their diagenesis. Developments in sedimentology, **12**: pp. 1-678, 2nd Edt. Elsevier, Amsterdam, Oxford, New York.

BATURIN G.N. (1982)

Phosphorites on the sea floor. Origin, composition and distribution. Development in sedimentology, 33: pp 1-343, Elsevier, Amsterdam, Oxford, New York.

BERGOMI C. & DAMIANI A.V. (1976)

Diagenesi precoce nei depositi Serravalliano-Tortoniani del Lazio e considerazioni sulla evoluzione strutturale del Bacino di sedimentazione miocenico. Boll. Serv. Geol. d'Italia, 97 (1978): pp. 35-66, Roma.

BLANC VERNET L. (1969)

Contribution à l'étude des foraminifères de Méditerranée. Relations entre la microfauna et le sédiment. Biocoenosis actuelles, thanatocoenosis pliocènes et quaternaires. Rec des travaux de la Station Marine d'Endoume, Fasc. 64, Bull. n°48: pp. 1-315, Fac. des Sciences de Marseille.

BOSENCE D. (1983)

Coralline algae from coralline algal biostrome. Miocene, Malta. Paleontology, 26: pp. 147-173.

BOSENCE D. & PEDLEY H. M. (1982)

Sedimentology and paleoecology of a Miocene coralline algal biostrome from the Maltese Islands. Paleogeogr., Paleoclimatol., Paleocol., 38: pp. 9-43.

BURNETT W. C. (1980)

Apatite-glaucinite associations off Peru-Chile: paleo-oceanographic implications. Journ. Geol. Soc. London, 137: pp. 757-764.

CARANNANTE G. (1982, a)

La Valle del Canale (Civita di Pietraroia, Matese). Una incisione miocenica riesumata sul margine della Piattaforma carbonatica Abruzzese-Campana. Geologica Romana, 21: pp. 511-521.

CARANNANTE G. (1982, b)

Modello deposizionale e diagenetico di un livello fosfatico nel Miocene carbonatico dell'Appennino Campano. Rendiconti Società Geologica Italiana, 5: pp. 15-20.

CARANNANTE G., DI GERONIMO I. & SIMONE L. (1984)

"Relict sediments" dans les séquence carbonatées miocene de l'Apennin méridional et leur analogues récents dans la Mer Méditerranée. IAS 5^e Europ. Reg. Meeting Marseille Abstr.: pp. 90-91.

CARANNANTE G., SIMONE L. & BARBERA C. (1981)

"Calcari a Briozoi e Litotamni" of Southern Apennines. Miocenic analogous of recent Mediterranean rhodolitic sediments. International Association of Sedimentologists, 2nd European Meeting, Bologna, Abstr.: pp. 17-20.

CARANNANTE G. & SIMONE L. (1984)

Drowned carbonate sequences in the Miocene of the Southern Apennines (Southern Italy). Abst. 7th Intern. Meet. of Carb Sediment, Liverpool.

CAULET J. P. (1972)

Recent biogenic calcareous sedimentation on the Algerian continental shelf. in Stanley D. J. (Ed.), The Mediterranean Sea: a natural sedimentation laboratory. Dowden, Hutchinson and Ross, Inc.: pp. 261-277 Stroudsburg, Pennsylvania.

- D'ARGENIO B. (1970)**
Evoluzione geotettonica comparata tra alcune piattaforme carbonatiche nei Mediterraneo Europeo ed Americano. Att. Acc. Pontaniana, N.S., **20**: pp. 1-34, Napoli.
- D'ARGENIO B. (1974)**
Le piattaforme carbonatiche periadriatiche. Mem. Soc. Geol. It., **13**: pp. 137-159.
- D'ARGENIO B., PESCATORE T. & SCANDONE P. (1975)**
Structural pattern of the "Campania-Lucania Apennines". pp. 313-327 in Ogniben L., Perotto M., Praturlon A. (Eds.) Structural Model of Italy Maps and Explanatory notes. Quaderni della Ricerca Scientifica, **90**: pp. 1-502, CNR, Roma.
- DEMAISON G. J. & MOORE G. T. (1980)**
Anoxic environments and oil source bed genesis. AAPG. Bull., **64**: pp. 1179-1209.
- EMERY K. O. (1968)**
Relict sediments on continental shelves of world. AAPG. Bull., **52**: pp. 445-464.
- FISHER A. G. (1969).**
Geological time-distance rates: The Bubnoff unit. Geol. Soc. of America Bulletin, **80**: pp. 549-552.
- FRANCO D. (1960)**
Su alcuni ittiodontoliti rinvenuti nei calcari Terziari a pettinidi di Pietraroia (Benevento). Boll. Soc. Natur. in Napoli, **67**: pp. 187-200.
- GAUTIER Y. V. & PICARD J. (1957)**
Bionomie du banc du Magaud (Est des îles d'Hyères). Rec. Travaux Stat. Marine d'Endoume, Bull. 12, Fasc. 21: pp. 28-40, Marseille.
- GINSBURG R. N. & JAMES N. P. (1974)**
Holocene carbonate sediments of continental shelves. in Burck C. A. and Drake C. L. (Eds.), The geology of continental margins. Springer-Verlag, New York: pp. 137-155.
- KEMPF M. (1970)**
Notes on the benthic bionomy of the N.-N. E. Brazilian shelf. Marine biology, **5**: pp. 213-224.
- KENDALL C. G. St. C. & SCHLAGER W. (1981)**
Carbonates and relative changes in sea level. Marine Geology, **44**: pp. 181-212.
- KRAMER J. R. (1964)**
Seawater saturation with apatite and carbonates. Science, **146**, n° 3644: pp. 637-638.
- LEES A. (1975)**
Possible influence of salinity and temperature on modern shelf carbonate sedimentation. Marine Geology, **19**: pp. 159-198.
- LOGAN B. W., HARDING J. L., AHR W.M., WILLIAMS J. D. & SNEAD R. G. (1969) -**
Carbonate sediments and reefs, Yucatan Shelf, Mexico. AAPG. Memoir, **11**: pp. 1-198.
- MANHEIM F., ROWE G. T. & JIPA D. (1975)**
Marine phosphorite formation off Peru. Journ. Sed. Petrol., **45**: pp. 243-251.

- MARSHALL J. F. & COOK P. J. (1980)**
Petrology of iron and phosphorous rich nodules from the E. Australian continental shelf. Journ. Geol. Soc. London, **137**: pp. 765-771.
- MILLIMAN J. D. (1974)**
Marine carbonates. Springer-Verlag, Berlino-Heidelberg, New York : pp. 1-375.
- MILLIMAN J. D. (1977)**
Role of calcareous Algae in Atlantic continental Margin Sedimentation. in Flugel E. (Ed.) "Fossil Algae". Springer-Verlag, Berlino: pp. 232-247.
- MILLIMAN J. D. & SUMMERHAYES C. P. (1975)**
Upper continental margin sedimentation off Brazil. in Fuchtbauer H., Lisitzin A. P., Milliman J. D., Seibold E. (Eds). Contributions to sedimentology, **4**: pp. 1-175, E. Schweizerbart'sche Verlagsbuchhandlung. (Nagel u. Obermiller), Stuttgart.
- MILLIMAN J. D., WEILER Y. & STANLEY D. J. (1972)**
Morphology and carbonate sedimentation on shallow banks in the Alboran Sea. in Stanley D. J. (Ed.), The Mediterranean Sea: a natural sedimentation laboratory. Dowden, Hutchinson and Ross, Inc., Stroudsburg, Pennsylvania: pp. 241-259.
- NELSON C. S. (1978)**
Temperate shelf carbonate sediments in the Cenozoic of New Zealand. Sedimentology, **25**: pp. 737-771.
- NELSON C. S. & BORNHOLD B. D. (1983)**
Temperate skeletal carbonate sediments on Scott shelf, northwestern Vancouver Island, Canada. Marine Geology, **52**: pp. 241-266.
- NELSON C. S., HANCOCK G. E. & KAMP P. J. J. (1982)**
Shelf to basin. Temperate skeletal carbonate sediments. Three King Plateau, New Zealand. Journ. Sedim. Petrol., **52**: pp. 717-732.
- ODIN G. S. & MATTER A. (1981)**
De Glauconiarum origine. Sedimentology, **28**: pp. 611-641.
- PARRISH (1982)**
Upwelling and Petroleum Source Beds, with Reference to Paleozoic. A. A. P. G. Bull., **66**: pp. 750-774.
- PERES J. M. & PICARD J. (1964)**
Nouveau manuel de bionomie bentique de la Mer Mediterranée. Rec. Travaux Station Marine d'Endoume, Bull. 31, Fasc. 47: pp. 1-137, Marseille.
- SCHLAGER W. (1981)**
The paradox of drowned reefs and carbonate Platforms. Geol. Soc. of America Bulletin, **92**: pp. 197-211.
- SELLI R. (1957)**
Sulla trasgressione del Miocene nell'Italia meridionale. Giorn. Geologia, sez. 2, **26** (1954-55): pp. 1-54, Bologna.
- SIMONE L. & CARANNANTE G. (in prep.)**
The fate of "Temperate" type carbonate platforms.
- STUDENCKI W. (1979)**
Sedimentation of algal limestones from Busko-Spa Environs (Middle Miocene, Central Poland). Palaeogeogr., Palaeoclim., Palaeoecol., **27**: pp. 155-165.
- SUMMERHAYES C. P., DE MELO U. & BARRETO H. T. (1976)**
The influence of upwelling on suspended matter and shelf sediments off Southeastern Brazil. Journ. Sed. Petrol., **46**: pp. 819-828.

- SWIFT D. J. P., STANLEY D. J. & CURRAY J. R. (1971)**
Relict sediments, a reconsideration. Journ. Geology, **79**: pp. 322-346.
- VICALVI M. A. & MILLIMAN J. D. (1977)**
Sedimentation on Continental Shelf off Southern Brazil, with Special Reference to Benthic Foraminifera. in Frost S. H., Weiss M. P. and Saunders J. B. (Eds). Reefs and related carbonates. Ecology and sedimentology A.A.P.G. Studies in Geology, **4**: pp. 313-328.
- WALTHER J. (1885)**
Die gesteins bildenden Kalkalgen des Golfs von Neapel und die Entstehung structurloser Kalke. Zeitschrift d. Deutschen Geologischen Gesellschaft: p. 28.
- WALTHER J. & SCHIRLITZ P. (1886)**
Studien zur Geologie des Golfes von Neapel. Zeitschrift d. Deutschen Geologischen Gesellschaft: pp. 295-341.
- WILSON J. L. & D'ARGENIO B. (1982)**
Controls on carbonate platforms and basin systems development. Geology, **10**: pp. 659-661.
- WOSTER W. S. & REID J.L. Jr. (1963)**
Eastern boundary currents. in Hill M. N. (Ed), The sea, **2**: pp. 253-280. Intersc. Publi., a division of John Wiley & Sons, New York - London.
- XAVIER A. (1982)**
Ferromanganese deposits off North East Brazil (S. Atlantic). Marine Geology, **47**: pp. 87-99.
- ZALAFFI M. (1963)**
Segnalazione di un livello con piccole coproliti fosfatiche e glauconitiche nel Miocene del Lazio meridionale. Geol. Romana, **2**: pp. 331-334, Roma.

fig. 2 - Typical Lower Miocene sequence of the Abruzzi-Campania Carbonate Platform, drowned after Burdigalian times. Neritic bioclastic sediments (BLL-interval A), passing through palimpsest phosphatic sediments (interval B) to hemipelagic marly limestones and marls (OM-interval C).

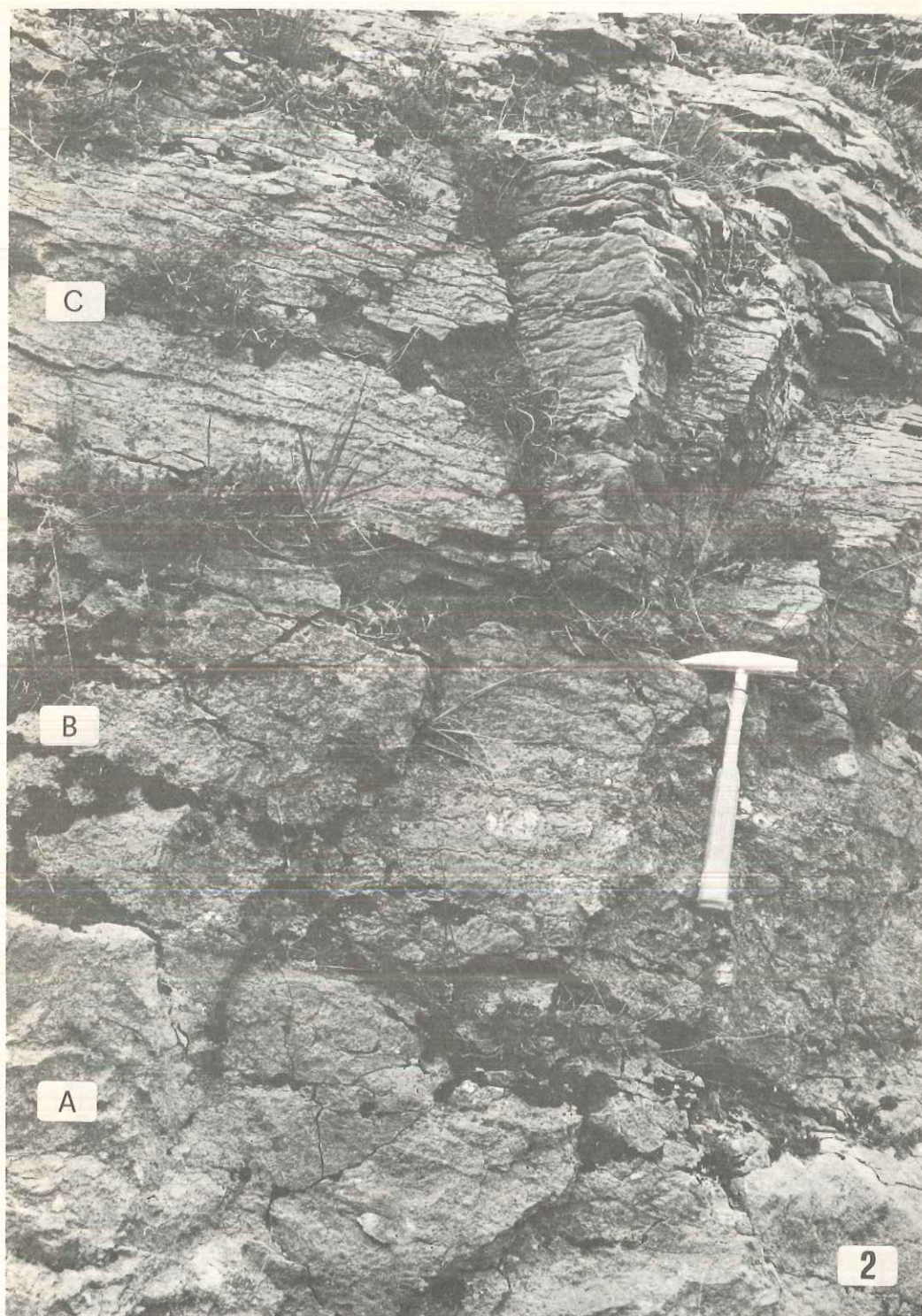


fig. 3, 4 - Mesozoic substratum intensively bored by lithophagous organisms (fig. 3), locally covered by Fe-Mn crusts (fig. 4). Bioclastic sediments (analogous to those of the interval A in fig. 2) filling the borings are the only evidence of previous bioclastic sedimentation. Pietraroia, Matese Mountains (Southern Apennines).

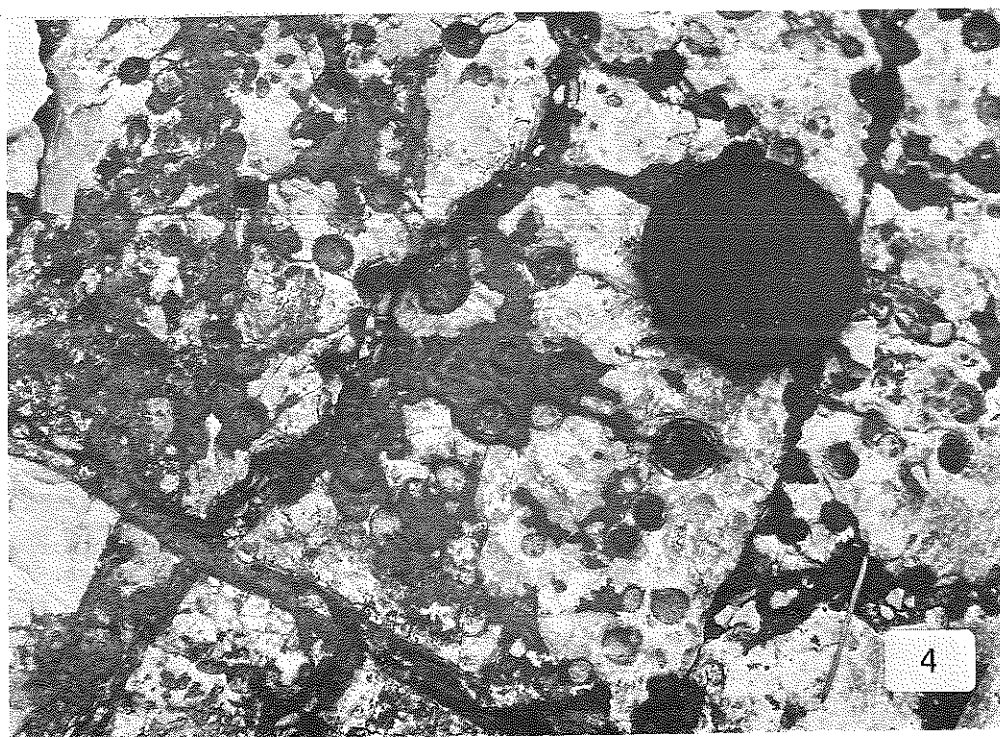
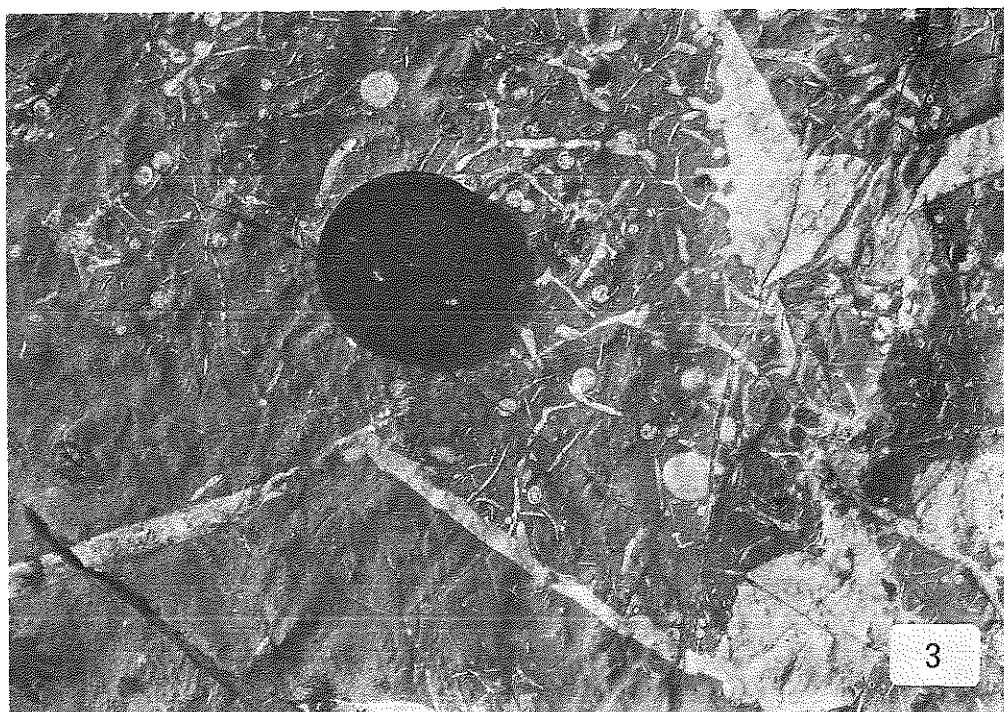


fig. 5 - Algal biolithite made up of encrusting coralline algae, bryozoans and foraminifera binding bioclastic sediments with thick crusts. It is similar to the algal incrustations that characterize some rigid circalittoral bottoms (rocky outcrops and/or concreted areas) of open shelves in temperate to subtropical areas (Biocenose du Coralligène de Plateau, see fig. 11). Coreno Ausonio, Aurunci Mountains (Southern Apennines).

fig. 6 - Rhodolitic sediments in a bioclastic matrix. The rhodolites, up to 20 cm in diameter, are similar to the present day nodular algal concretions which characterize some circalittoral bottoms, especially on banks winnowed by strong currents (Facies à pralines of the "Biocenose du Détritique Côtier"). Coreno Ausonio, Aurunci Mountains (Southern Apennines).



fig. 7, 8 - Early Miocene bioclastic neritic sediments. Their composition corresponds to that of recent circalittoral sediments of the carbonate open shelves in temperate to subtropical areas. fig. 7 (thin section, parallel nicols, 25x) shows coralline algae, bryozoans, large benthic forams, etc. Cusano Mutri, Matese Mountains (Southern Apennines). In fig. 8 (thin section, parallel nicols, 25x) the sediments show heavily bored bioclastic grains and significant muddy matrix. Coreno Ausonio, Aurunci Mountains (Southern Apennines).

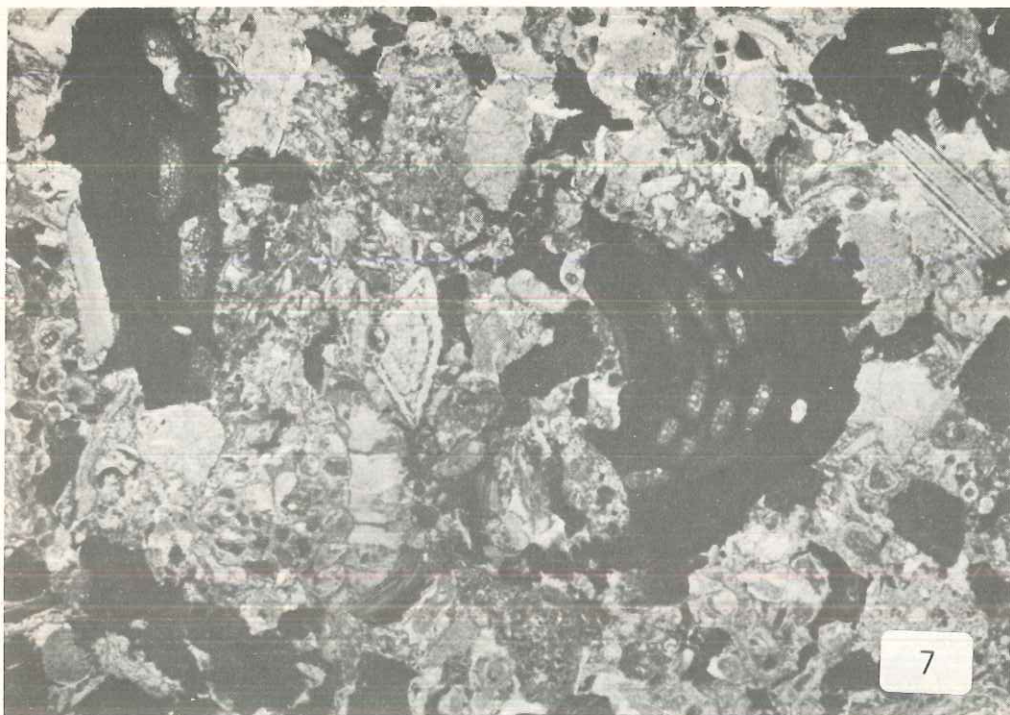


fig. 9 - Phosphatic calcarenite (thin section, parallel nicols, 10x). The bioclastic grains are deeply corroded and stained: these sediments formed a relict detrital bottom, comparable with the recent relict sediments which cover the outermost part of the shelf in temperate to subtropical areas (Sediments of the "Biocenose du Détritique du Large", see also fig. 11 and fig. 12). Ponte Arcicchiarico, Matese Mountains (Southern Apennines).

fig. 10 - Hemipelagic globigerina mudstone (interval A in fig. 2, thin section, parallel nicols, 10x). These sediments overly the drowned Miocene sequence. Régia Piana, Matese Mountains (Southern Apennines).

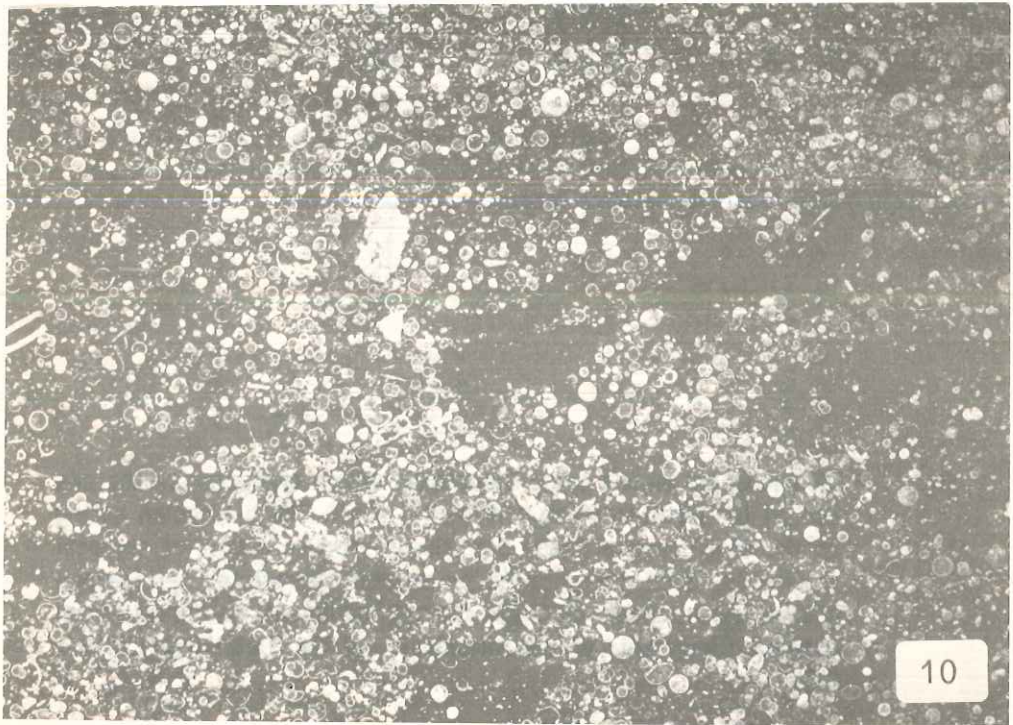
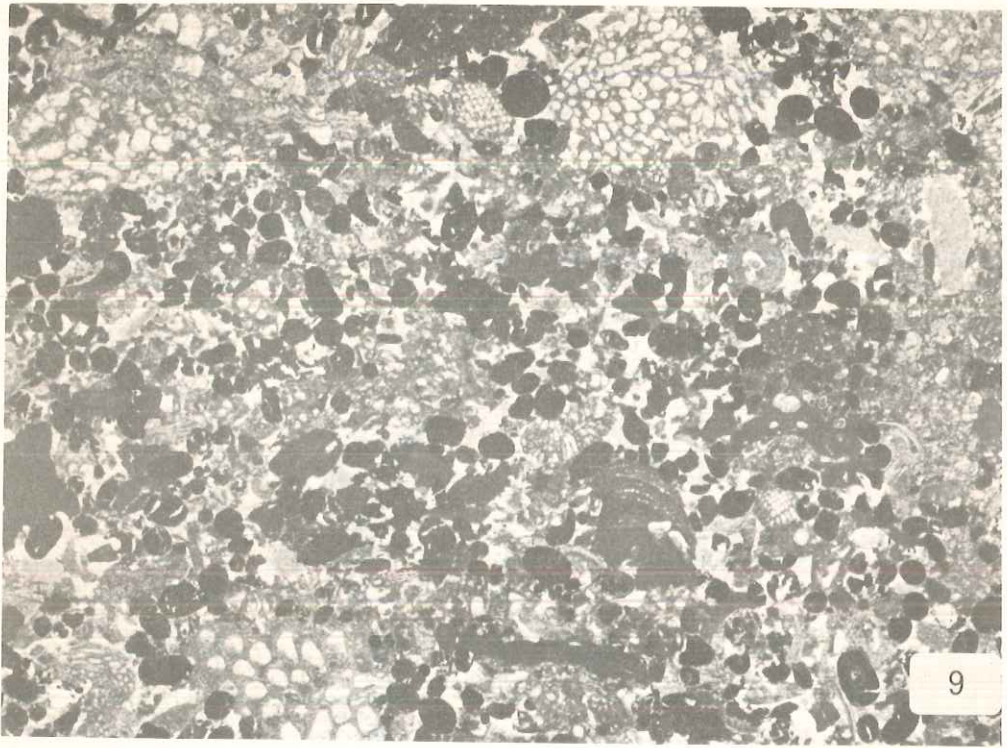
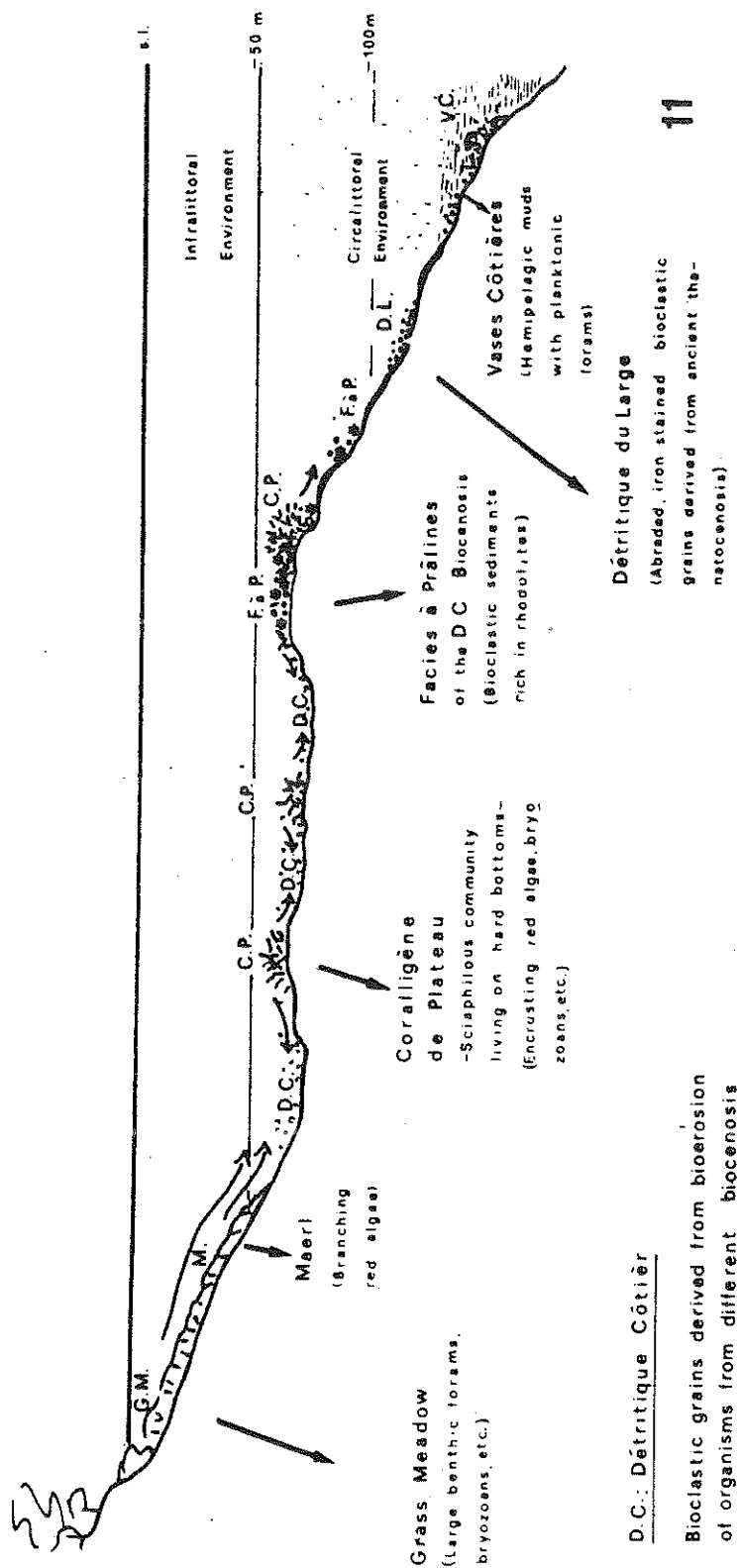


fig. 11 - Relationships among some Biocenoses which characterize the sea bed on the Mediterranean continental shelf. The bioerosion acting on the organisms of these Biocenoses produce a bulk of skeletal fragments. Such grains, with or without associated terrigenous grains, form sheet of loose-moving sediment on circalittoral bottoms (Sediments of the Biocenosis of the "Détritique Côtier", D.C).



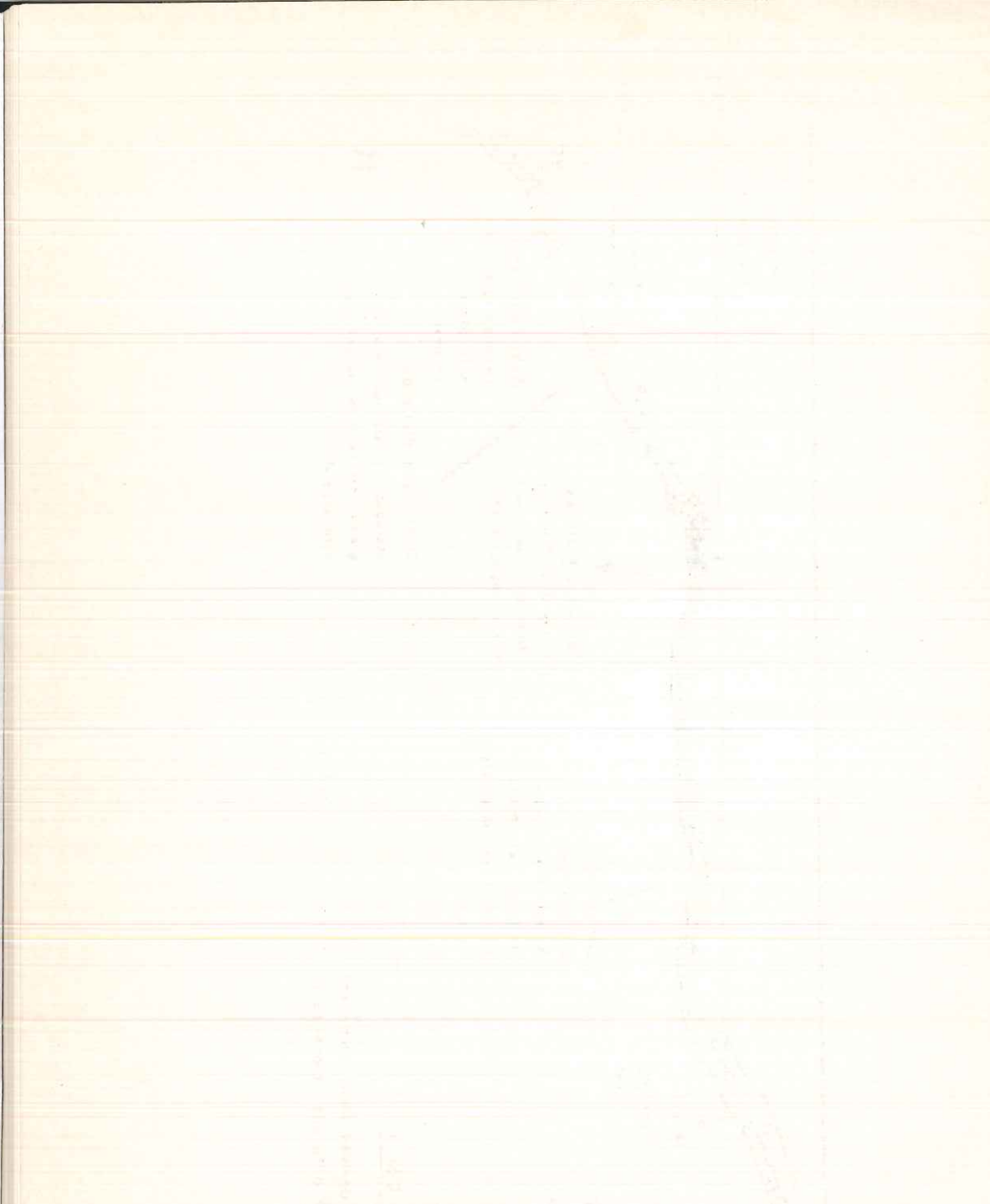
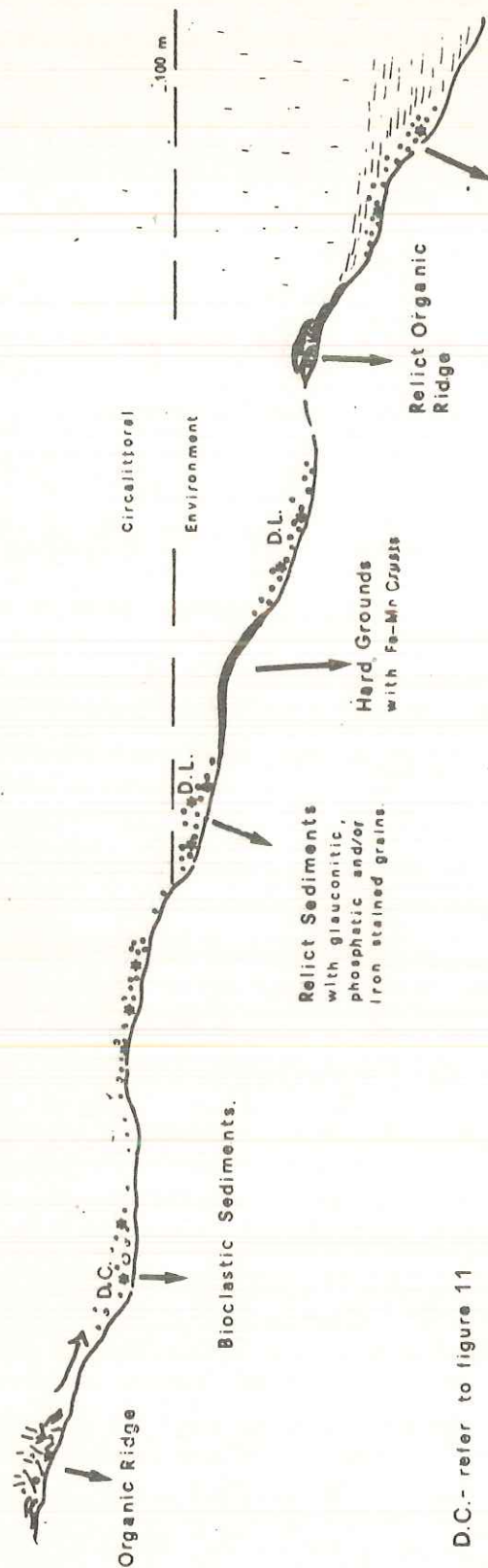


fig. 12 - Sediment distribution on a marginal carbonate shelf. Oceanward the bioclastic sediments of the Biocenosis of the "Détritique Côtier"(D. C.), characterized by low ratio of living benthos respect to its skeletal fragments, gradually pass to the relict sediments of the Biocenosis of the "Détritique du Large"(D. L.), due to the organisms producing skeletal grains.

- 50 m



D.C.- refer to figure 11

D.L.- refer to figure 11

Hemipelagic Marls on
Relict Sediments (P_2
limpset Sequences).

CRITERI DI ANALISI DI FACIES E CLASSIFICAZIONE
DEI TRAVERTINI PLEISTOCENICI DELL'ITALIA MERIDIONALE

Nota di Vittoria FERRERI (*)
presentata dal socio ordinario
Bruno D'ARGENIO
Adunanza del 14 dicembre 1985

Riassunto

Vengono discussi alcuni criteri di nomenclatura utili per la identificazione delle litofacies travertinose e viene proposta una classificazione dei travertini dell'Italia meridionale basata sulle loro caratteristiche tessiturali.

I tipi litologici ricorrenti negli affioramenti di travertino studiati (Campania e Molise) possono essere riuniti in gruppi che caratterizzano un certo numero di associazioni litologiche principali (associazioni di litofacies). L'interpretazione delle associazioni di litofacies, a sua volta, ha implicazioni di carattere ambientale che possono permettere la formulazione di modelli genetici e la ricostruzione dell'evoluzione geomorfologica dei luoghi deposizionali.

Abstract

Travertines are widespread in Southern Italy, where they form lensoid bodies (up to some square kilometers of extent and several meters of thickness), mostly deposited during the Pleistocene.

These sediments result essentially from calcareous incrustations on ve-

(*) Dipartimento di Scienze della Terra - Università di Napoli- Largo S. Marcellino, 10 - 80138 NAPOLI.

getable structures and are briefly described in terms of textures and sedimentary structures.

Criteria for facies analysis and interpretation, and a textural classification, are also presented. On these grounds several lithofacies and lithofacies associations may be identified, the latter corresponding to specific sedimentary environments and physiographies which form complex and rapidly evolving depositional systems.

1. INTRODUZIONE

Il termine travertino deriva dal latino lapis tiburtinus o pietra di Tivoli, abitato sito in vicinanza di Roma, dove questi sedimenti affiorano diffusamente e sono largamente rappresentate varie litologie. Travertino viene qui usato nella sua accezione più ampia (D'Argenio ed al., 1981), per indicare depositi carbonatici che si formano in ambienti continentali, in prossimità di sorgenti calcarifere, talora termali, prevalentemente per processi di incrostazione su strutture vegetali. Le analisi isotopiche dell'ossigeno dei travertini da noi studiati indicano una termalità non elevata (tra 20° e 30°C) per i travertini della bassa valle del Tanagro (Buccino ed al., 1978) e temperature prossime a quelle ambiente per i travertini di Pontecagnano (D'Argenio ed al., 1983) e di Rocchetta al Volturno (Brancaccio ed al., in stampa).

I travertini possono essere classificati in base ai caratteri delle incrostazioni primarie, che d'altra parte determinano i caratteri delle differenti tessiture, non tenendo conto né del grado di cementazione né della porosità. Queste proprietà infatti solo in piccola parte sono precoci e spesso risultano connesse a processi post-deposizionali che hanno modificato le caratteristiche originarie dei travertini.

Vengono in tal modo inclusi nella denominazione di travertino i calcareous tufa, i calc tufa, i plant tufa etc. con cui nella terminologia anglosassone vengono solitamente definiti, in senso alquanto restrittivo, depositi da incrostazione scarsamente cementati e altamente porosi. Stalattiti, stalagmiti e altri speleotemi in genere, talora impropriamente inclusi sotto la denominazione di travertino (Gary ed al., 1974), sono invece da considerare a parte, avendo un significato genetico diverso in quanto precipitati che si formano in cavità per acque percolanti o freatiche.

Ruolo attivo nello sviluppo delle incrostazioni travertinose esercitano in particolare le cianofite e i batteri (Weed, 1889; Golubic, 1973;

Buccino ed al., 1978; Casanova, 1981; D'Argenio ed al., 1983; Folk e Chafetz, 1983; Brancaccio ed al., in stampa) e ciò è testimoniato dai caratteri biogenici delle tessiture (cryptoalgal fabrics in Monty, 1976; Casanova, 1981; D'Argenio ed al., 1983; Brancaccio ed al., in stampa) messi particolarmente in evidenza dallo studio delle microstrutture.

I travertini dell'Italia meridionale (fig.1, nel testo) costituiscono ammassi lentiformi estesi da meno di 1 km^2 a più di 10 km^2 e spessi da pochi metri a poche decine di metri; si sono depositati durante il Pleistocene medio e superiore e si rinvencono in depressioni morfologico-strutturali dell'Appennino formatesi durante le fasi neotettoniche dello stesso Pleistocene.

Il loro studio da alcuni anni viene affrontato da un gruppo di ricercatori afferenti al Dipartimento di Scienze della Terra dell'Università di Napoli con una metodologia finora non utilizzata per questo tipo di sedimenti e basata sul riconoscimento e l'interpretazione delle litofacies e del loro modo di associarsi e distribuirsi nello spazio.

Ciò ha permesso, di volta in volta, di evidenziare alcuni caratteri paleoambientali che hanno condizionato la deposizione dei travertini, e il cui riconoscimento è essenziale per giungere alla formulazione di modelli genetici (Buccino ed al., 1978; D'Argenio ed al., 1983; Brancaccio ed al., in stampa). E' sorta così anche la necessità di usare una terminologia che fosse di facile applicazione.

Oggetto di questo lavoro è la individuazione su basi sedimentologiche di criteri di analisi e interpretazione delle litofacies travertinose. Viene anche proposta una classificazione che, analogamente a quella di Embry e Klován (1971), a sua volta derivante dall'ormai classico schema di Leighton e Pendexter (1962), utilizza le caratteristiche tessiturali delle rocce in esame.

Un tale schema (Tab.1), pur non pretendendo di organizzare tutti i casi possibili e limitandosi a quelli fino ad ora osservati (Buccino ed al., 1978; D'Argenio ed al., 1983; Brancaccio ed al., in stampa), comprende essenzialmente i tipi litologici ricorrenti negli affioramenti di travertino studiati.

I vari tipi litologici riconosciuti, formati essenzialmente da incrostrazioni a calcite, si possono ovviamente raggruppare in litofacies (intendendo convenzionalmente per litofacies un aggruppamento di litotipi frequentemente associati e che, come tali, assumono specifiche implicazioni genetiche). Le varie litofacies sono state raggruppate in associazioni naturali, in funzione anche della loro cartografabilità. Infatti, a causa

della grande variabilità laterale dei depositi di travertino, solo così è possibile procedere ad un rilevamento per facies su un'intera lente, utilizzando un rapporto in genere non superiore a 1:10.000, per la piccola estensione e l'esiguo spessore degli affioramenti.

2. TESSITURE

Gli elementi base delle tessiture dei travertini sono rappresentati dalle incrostazioni. Di queste bisogna considerare i caratteri macroscopici e le microstrutture.

L'osservazione dei caratteri macroscopici nei travertini permette di suddividere le tessiture in due grandi raggruppamenti: travertini "detritici" e travertini autoctoni (Tab.1). Tra questi due raggruppamenti esistono naturalmente numerosi termini di passaggio che caratterizzano le tessiture intermedie o miste.

2.1. Travertini "detritici"

I travertini detritici sono costituiti da granuli incrostati i quali conferiscono nell'insieme alla roccia una caratteristica tessitura "clastica". Questi granuli sono, di regola, frammenti di incrostazione su supporti vegetali di vario tipo (fitoclasti), e rappresentano gli elementi caratterizzanti la gran parte dei travertini detritici. Essi hanno taglia da arenitica a ruditica e struttura più o meno complessa (in relazione ai supporti vegetali da cui derivano); di rado indicano una storia di trasporto relativamente lunga ad opera di correnti trattive (orientamento dei clasti, embriciatura etc.), più spesso indicano accumuli quasi in posto o a breve distanza dal luogo dell'incrostazione (fig.1 e fig.2 fuori testo).

Ai fitoclasti può accompagnarsi una certa percentuale di matrice; questa rappresenta la frazione a granulometria più fine ed è formata da fitoclasti di taglia inferiore ai 2 mm e da sabbia e/o silt calcarei (fig.3). Talora associati ai fitoclasti si rinvencono ostracodi (fig.4) e/o molluschi dulcicoli (fig.5), in genere in quantità alquanto subordinata, che va però aumentando nei litotipi più ricchi in matrice. Fitoclasti e matrice sono quindi i principali costituenti della gran parte dei travertini "detritici".

Nella classificazione dei travertini qui proposta (Tab.1) si è tenuto conto dei loro rapporti quantitativi (oltre che delle dimensioni dei gra-

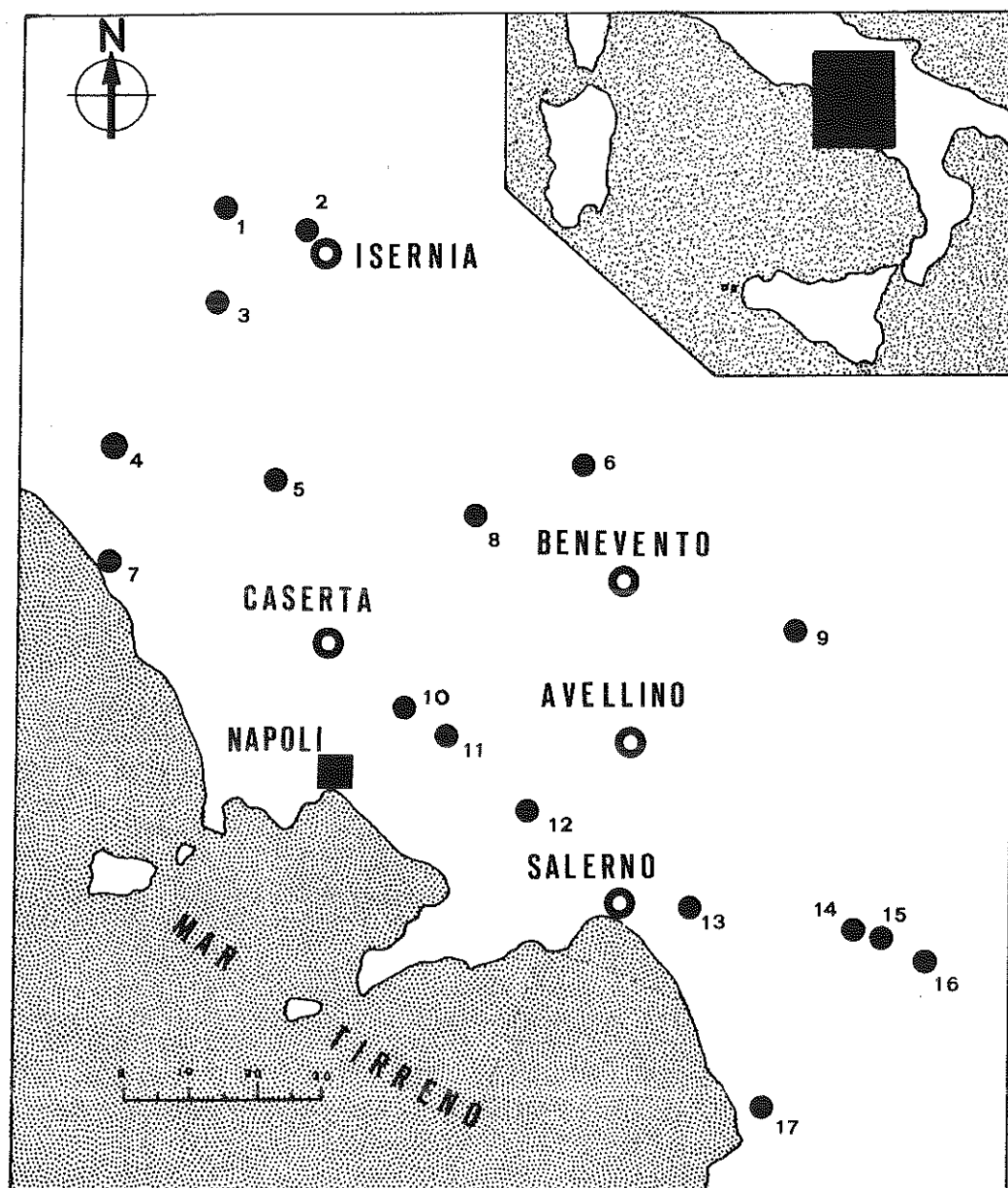


Fig.1-Principali affioramenti di travertino del Molise meridionale e della Campania. 1. Rocchetta al Volturno, 2. Isernia, 3. Pozzilli, 4. Suio, 5. Riardo, 6. Morcone, 7. Mondragone, 8. Telese, 9. S. Teodoro, 10. Bellona, 11. Cancellò, 12. S. Valentino Torio, 13. Pontecagnano, 14. Campagna, 15. Bassa Valle del Tanagro, 16. Fiume Bianco, 17. Paestum-Capaccio.

nuli fitoclastici). Poichè i travertini detritici si sono originati in seguito a processi di deposizione meccanica, tale rapporto assume notevole importanza in quanto può fornire informazioni di carattere ambientale, in particolare sulle caratteristiche idrodinamiche del mezzo.

L'esclusiva presenza o la prevalenza di incrostazioni su foglie (integre e/o in frammenti) caratterizza inoltre i travertini bibliolitici (fig.6). Questi particolari tipi litologici nei quali foglie incrostate o loro modelli esterni si rinvencono con una certa frequenza, mostrano chiari termini di passaggio sia ai travertini fitoclastici (fig.7) che ai travertini stromatolitici. Nel loro aspetto più tipico le foglie presentano una disposizione embriciata e appaiono regolarmente impacchettate e isorientate.

Nei travertini fitoclastici, in alcune calciruditi e calcareniti fitoclastiche a scarsa matrice e nei travertini bibliolitici si può osservare come i singoli elementi siano precocemente legati dagli stessi processi di incrostazione che hanno portato alla loro formazione. Infatti lo stesso tipo di "cemento" precoce che incrosta i granuli tende a riempire gli spazi intergranulari e intragranulari (cavità di fitoclasti e di organismi), dando origine ad una tessitura criptoalgale (cryptoalgal fabric; Monty, 1976) rappresentata generalmente da micronoduli che tappezzano le cavità residue proiettandosi al loro interno (fig.8).

Anche se con frequenza minore, nei depositi travertinosi possiamo incontrare altri tipi litologici caratterizzati di volta in volta dalla presenza di granuli non fitoclastici di taglia varia che conferiscono l'aspetto "detritico" alle tessiture e che, in prima approssimazione, possiamo distinguere in oncoliti, pisoliti batteriche e pisoliti inorganiche.

Le oncoliti (fig.9) sono strutture sferoidali formate da involucri concentrici interi o incompleti di origine algale (per una definizione moderna del termine si veda Logan ed al., 1964 e Peryt, 1983).

Le pisoliti batteriche sono strutture sferoidali con diametro generalmente compreso fra 4 e 8 mm, la laminazione concentrica è normalmente indistinta o manca del tutto mentre sono evidenti aree in cui i cristalli hanno una disposizione radiale. La loro genesi è legata all'attività di batteri precipitanti in acque tranquille (per ulteriori dati si veda Folk e Chafetz, 1983).

Le pisoliti inorganiche sono strutture sferoidali di 3-10 mm di diametro, sono bene arrotondate e caratterizzate da una sottile laminazione concentrica. Si formano per processi di rapida precipitazione chimica in acque correnti e con l'intervento molto subordinato di batteri e/o cianofite (per una migliore caratterizzazione si veda Folk e Chafetz,

tz, 1983).

L'esclusiva presenza di litoclasti travertinosi più o meno arrotondati caratterizza infine tessiture più strettamente detritiche, molto frequenti negli affioramenti di travertino e date dall'accumulo di frammenti ruditici più o meno arrotondati derivanti dalla rielaborazione di preesistenti sedimenti travertinosi.

Pisoliti inorganiche e litoclasti travertinosi possono rappresentare riempimenti di canali o di condotti carsici.

2.2. Travertini autoctoni

I travertini autoctoni derivano da rapidi processi di incrostazione che conservano le strutture vegetali (fitostrutture) nella loro posizione originaria (incrostazioni in situ). I vari componenti mantengono quindi gli stessi rapporti reciproci che avevano prima dell'incrostazione. Questi travertini sono dei boundstones e sono confrontabili con i boundstones di Dunham (1962) e di Embry e Klovan (1971).

Si possono distinguere tre raggruppamenti tessiturali fondamentalmente diversi: (a) travertini stromatolitici, (b) travertini microermali e (c) travertini fitoermali.

(a) I travertini stromatolitici sono indubbiamente i tipi litologici più noti, anche perché meglio si prestano ad essere usati come materiali ornamentali per le loro caratteristiche tecniche. Sono delle laminiti di tipo stromatolitico nel senso ampio del termine. La formazione delle lamine è strettamente legata all'attività di comunità di cianofite e di batteri. Questi travertini risentono notevolmente delle variazioni ambientali e nella successione ciclica delle lamine evidenziano, talora marcatamente, ritmi deposizionali (ritmi stagionali?). Le variazioni dei caratteri tessiturali suggeriscono inoltre ambienti deposizionali più o meno differenti tra loro.

I caratteri tessiturali riguardano in particolare la porosità inter e intralaminare, lo spessore delle singole lamine, le dimensioni e l'orientamento preferenziale dei cristalli di precipitazione primaria, l'andamento più o meno ondulato delle superfici laminari e la loro "giacitura", che può variare da orizzontale a più o meno inclinata. In prima approssimazione possiamo dividere i travertini stromatolitici in due grandi gruppi (Tab.2), contraddistinti dai seguenti caratteri generali:

Travertini stromatolitici a spatite e micrite. Sono generalmente costituiti da una sovrapposizione più o meno regolare di lamine micritiche e lamine spatitiche (in media 1-3 mm di spessore), più o meno ondulate, con andamento da

TRAVERTINI DETRITICI (*) (TRASPORTO LIMITATO O ASSENTE)				TRAVERTINI AUTOCTONI (INCROSTAZIONI IN SITU) (**)		
Meno del 10% di granuli fitoclastici > 2 mm		Più del 10% di granuli fitoclastici > 2 mm				
Con matrice di sabbia calcarea (***) ≤ 2 mm	Senza matrice di sabbia calcarea(****)		Contenuto in sabbia calcarea	Granulo sostenuti	Su biocenosi a cianofite e batteri. Formano laminiti	Su microfite. Formano strutture a microtubuli orientati o a maglie intrecciate
	Granulo sostenuti		> 10% < 50%			Su micro e macrofite. Formano impalcature rigide
Sostenuti da matrice						
matrice		calcareo				
≥ 50%	< 50%	> 10%	≤ 10%			
Fitoclasti						
< 10%	> 10%					
Sabbie calcaree	Sabbie fitoclastiche			TRAVERTINI (GRAINSTONE) FITOCLASTICI	TRAVERTINI (RUDSTONE) FITOCLASTICI	TRAVERTINI MICROERMALI
SABBIE TRAVERTINOSE (***)						

B O U N D S T O N E
T R A V E R T I N O S I

TABELLA 1. - In questo schema di classificazione che si ispira a quelli di Leighton e Pendexter (1962) ed Embry e Klovian (1971), i travertini sono divisi nei due grandi gruppi di travertini detritici e travertini autocloni. Per i caratteri di questi ultimi si rimanda al testo, mentre per quel che riguarda i travertini detritici bisogna tenere presente che la loro suddivisione si basa sul rapporto granuli fitoclastici/matrice e sulle dimensioni dei fitoclasti stessi, non considerando gli altri granuli eventualmente presenti in quantità subordinata (per es. fossili, frammenti di incrostazione su foglie, etc.). La matrice assume il significato della micrite nelle rocce carbonatiche (Leighton e Pendexter, 1962), mentre i limiti composizionali tra i vari litotipi sono fissati arbitrariamente. Le tessiture fitoclastiche ruditiche e quelle arenitiche sono individuate in relazione alla presenza rispettivamente di più del 10% o meno del 10% di fitoclasti di taglia superiore a 2 mm. Le une e le altre possono essere a matrice prevalente (matrice di sabbia o silt calcarei > 10%) o granulo-sostenuti (granuli a contatto tra loro). Se il contenuto in sabbia-silt calcarei è compreso tra il 10% e il 50%, avremo calciruditi e calcareniti fitoclastiche, se la matrice supera il 50% avremo sabbie travertinose. Il termine estremo è rappresentato dalle sabbie (o dai silt) calcarei (assenza o quasi di fitoclasti), mentre le sabbie fitoclastiche rappresentano il termine di passaggio alle calcareniti fitoclastiche. Nel caso dei termini granulo-sostenuti, avremo travertini in senso stretto e distingueremo i travertini fitoclastici di taglia arenitica dai travertini fitoclastici di taglia ruditica, tessiture rispettivamente comparabili al grainstone e al rudstone di Embry e Klovian (1971).

(*) Frazione detritica quasi interamente costituita da fitoclasti (frammenti di vegetali incrostati, di taglia da arenitica-fine a ruditica-grossolana) i quali sono spesso legati precocemente da incrostazione biogenica.

(**) Caratteristiche tessiturali e microstrutturali generalmente riconducibili a processi di incrostazione quasi interamente biogenici (cryptocal fabrics).

(***) Include talora anche silt calcarei.

suborizzontale ad orizzontale. La porosità è preferenzialmente interlamina-
re ed è generalmente elevata. Le cavità in sezione appaiono allungate, han-
no dimensioni varie e forma irregolare e solitamente risultano allargate per
processi di soluzione (fig.10). Vi si possono intercalare piccoli canali
riempiti da fitoclasti.

Travertini stromatolitici a spatite. Sono generalmente formati da un'alter-
nanza più o meno regolare di lamine scure (dal marrone al grigio anche cari-
co) e di lamine chiare (dall'avorio al giallo chiaro), leggermente ondulate
e generalmente più o meno inclinate. Nelle lamine chiare (da circa 1 mm a
qualche millimetro di spessore) sono evidenti grandi cristalli spatici che
si accrescono perpendicolarmente alle lamine e, in genere, si organizzano in
strutture radiali. Di regola esiste una discreta porosità intercristallina;
cavità di forma e dimensioni varie, disposte parallelamente alle lamine pos-
sono determinare orizzonti particolarmente porosi. Quando l'erosione mette
a nudo la superficie di una o poche lamine, si possono osservare, talora mol-
to distintamente, piccole "increspature" algali di misura centimetrica ("mi-
crovaschette"), (fig.12). Le lamine scure sono generalmente più sottili e
possono ripetersi senza l'intercalazione di lamine chiare; esse sono carat-
terizzate da un arricchimento in materia organica e da una minore porosità
intercristallina (fig.11 e fig.12).

Le lamine chiare e le lamine scure appaiono bene organizzate in piccoli
cicli, talora chiaramente discontinui (contatti erosivi tra lamine sovrappo-
ste, presenza di piccole cavità di forma irregolare, "film" micritici che
tagliano nettamente la superficie sottostante).

(b) I travertini microermali sono incrostazioni in situ su piante igrofi-
li di piccola taglia (microfite), genericamente riconducibili a tallofi-
te e a briofite. Presentano discreta porosità e permeabilità, caratteri
strettamente legati alla particolare organizzazione delle incrostazioni in
microtubuli (diametro da circa 1 mm a pochi decimi di millimetro; lunghezza
da circa 1 a pochi millimetri). I microtubuli possono presentarsi variamen-
te ramificati e organizzati in strutture domiformi (microerme), ricche di
vacuoli e caratterizzate da tessitura a maglie irregolari (fig.13). I micro-
tubuli possono anche presentarsi all'incirca equidimensionali, più o meno
inclinati ed isorientati (fig.14) e dare origine a strutture a laminazione
centimetrica uniforme (cfr. fig.3b in Brancaccio ed al., in stampa).

(c) I Travertini fitoermali possono essere comparati ai framestones di Em-
bry e Klován (1971). Le incrostazioni interessano micro e macrofite
(piante igrofile inferiori e superiori) e costruiscono impalcature rigide
altamente permeabili, con larghi spazi vuoti che possono superare i 10 cm³.

	TRAVERTINI STROMATOLITICI A SPATITE E MICRITE	TRAVERTINI STROMATOLITICI A SPATITE
CARATTERI MACROSCOPICI	Alternanze più o meno regolari di lamine micritiche e di lamine spatitiche (1-3 mm di spessore) più o meno ondulate e con giacitura suborizzontale	Alternanze regolari di lamine spatitiche chiare e scure (da circa 1 mm a 5 mm di spessore), leggermente ondulate e con giacitura da suborizzontale a subverticale
MICROSTRUTTURA	Le lamine spatitiche sono formate da cristalli da anedrali e subedrali con dimensioni medie di circa 0,05 mm e leggermente "torbidi". Le lamine micritiche talora contengono granuli assimilabili a peloidi	Le lamine chiare sono formate da cristalli spatitici allungati (fino a qualche mm) da subedrali ad euedrali, più o meno torbidi, disposti con assi "C" subverticali, talora organizzati in "ciuffi"; al loro interno è visibile l'inclusione di filamenti algali (cianofite). Le lamine scure sono più ricche in materia organica e generalmente sottili
POROSITÀ	Scarsa porosità intercristallina. Cavità prevalentemente interlaminari, di forma varia, generalmente allargate per processi di soluzione	Discreta porosità intercristallina, maggiore nelle lamine chiare. Cavità prevalentemente intralaminari ma anche interlaminari di forma irregolare; solitamente appaiono allargate per processi di soluzione. Frequenti contatti discordanti (erosivi) tra lamine chiare e lamine scure
STRUTTURE SEDIMENTARIE	Piccoli canali max. pochi decimetri in sezione trasversale	Piccole "increspature" algali sulla superficie di accumulo, dimensioni centimetriche ("microvaschette")
MECANISMI DI DEPOSIZIONE	Pendii poco acclivi Zone marginali di piccole "vasche" poco profonde da cui lentamente traboccano flussi laminari di acqua Piccole "dighe" al margine di zone lacustri o palustri	Pendii acclivi Zone marginali di piccole "vasche" con rapidi flussi laminari di acque

TABELLA 2.-Caratteri generali delle due principali litofacies stromatolitiche individuate nei travertini dell'Italia meridionale.

I travertini fitoermali possono dar luogo a masse "costruite" di dimensioni discrete, che appaiono chiaramente distinte rispetto ai sedimenti circostanti e quasi esclusivamente costituite da incrostazioni su muschi (fig.15), ovvero formano strutture più o meno tabulari per incrostazioni su piante palustri (canne, giunchi), (fig.16).

3. MICROSTRUTTURE .

Le microstrutture dei travertini appaiono condizionate da vari tipi di mosaici cristallini. Per quanto riguarda la denominazione dei cristalli su basi dimensionali, in accordo con Folk (1962) si possono distinguere cristalli della grandezza della micrite ($< 0,004$ mm) della microspatite (taglia compresa tra $0,004$ mm e $0,01$ mm) e della spatite ($> 0,01$ mm). Per la identificazione dei cristalli successivi alle incrostazioni primarie (cementi in cavità e mosaici di ricristallizzazione) si può fare riferimento ai criteri suggeriti da Folk (1965) e Bathurst (1976).

A causa della molteplice variabilità e integrazione di fattori e di micro ambienti che concorrono alla loro formazione, i mosaici cristallini si presentano sempre diversi e molto complessi. E' quindi difficile delineare dei criteri descrittivi generali. Si può comunque dire che, nelle linee generali, appare spesso evidente l'azione esercitata dalle comunità di cianofite e di batteri sullo sviluppo dei processi di incrostazione (mentre il resto della vegetazione si comporta come supporto passivo). Si osservano inoltre convergenze, a livello di microfacies, in tessiture diverse che si rinvencono solitamente associate e per le quali si può quindi ipotizzare la formazione in ambienti o subambienti deposizionali simili.

Si possono distinguere diversi tipi di mosaici calcitici:

(a) Mosaici prevalentemente microcristallini. I microcristalli (micrite e microspatite) sono formati da calcite e tendono ad organizzarsi in microstrutture di tipo arborescente (fig.17) che ricalcano la crescita dendritica di originari microrganismi filamentosi riferibili a cianofite (Golubic, 1973; Monty, 1976; Casanova, 1981). Questi mosaici caratterizzano la tessitura di travertini microermali e di travertini stromatolitici, generalmente a laminazione indistinta, associati ai primi.

(b) Mosaici con cristalli di dimensioni variabili (da vari micron a circa 1 mm). Mosaici calcitici costituiti da cristalli talora molto irregolari nella forma, i quali conservano al loro interno gli originari filamenti e/o "ciuffi" algali che ne hanno condizionato la precipitazione (fig.18). Il loro rinvenimento nei mosaici di incrostazione indica chiaramente un processo

di precipitazione biogenica primaria (cryptoalgal fabrics in Monty, 1976). Caratterizzano la tessitura di travertini microermali e di travertini fitoclastici a questi generalmente associati.

In alcuni casi si osserva, in forma subordinata, la presenza di processi di incrostazione per precipitazione diretta del carbonato di calcio sui supporti vegetali le cui pareti appaiono rivestite da una sorta di guaina formata da cristalli di calcite spatica quasi limpidi e disposti a palizzata. Su questi si impianta e si accresce in tutte le direzioni l'attività algale, testimoniata dai cristalli di precipitazione biogenica.

(c) Alternanze di lamine micritiche e di lamine spatiche (incrostazioni di tipo "a" in D'Argenio ed al., 1983). Nelle lamine spatiche i cristalli, da anedrali a subedrali, possono raggiungere anche dimensioni fino a 0,1 mm, ma in genere hanno dimensione media intorno a 0,05 mm e appaiono leggermente torbidi. Questo tipo di organizzazione cristallina, in tutte le sue possibili varianti, è largamente diffusa. Si rinviene infatti in travertini stromatolitici, in travertini microermali, in travertini fitoermali (fig.19), in travertini fitoclastici, in travertini biblitolitici e in travertini oncolitici (fig.9). Mentre nei travertini stromatolitici le lamine presentano un andamento generalmente più regolare, in altri tipi di travertino queste stesse lamine possono formare guaine che rivestono originari supporti o cavità e tendono ad accrescersi variamente, fondendosi ed assumendo talora un andamento irregolare (cfr. fig.8a e fig.8b in Buccino ed al., 1978). Conferiscono così complessivamente alla tessitura i caratteri di una tessitura criptoalgale micronodulare, irregolarmente vacuolare (Monty, 1976).

(d) Alternanze di lamine spatiche chiare e scure (incrostazioni di tipo "b" in D'Argenio ed al., 1983). Nelle lamine chiare i cristalli, da subedrali ad eudrali, possono raggiungere dimensioni notevoli (fino a qualche millimetro di lunghezza); sono generalmente "torbidi", disposti con gli assi "C" subverticali (talora organizzati in forma di "ciuffi") e mostrano al loro interno l'inclusione di originari filamenti algali riconducibili a cianofite (Monty, 1976; Casanova, 1981) (fig.20). In corrispondenza delle lamine scure i cristalli possono apparire in continuità ottica con le lamine sovrastanti e "attraversarle", preservando al loro interno i sottili orizzonti micritici più o meno continui e ondulati che sono parte di queste tessiture (fig.21). Talora invece gli orizzonti micritici interrompono nettamente la crescita dei cristalli sottostanti, evidenziando discontinuità nel processo deposizionale (cfr. fig.6a in Brancaccio ed al., in stampa). Questi aspetti microstrutturali caratterizzano più specificatamente litofacies di travertino stromatolitico e testimoniano, ancora una volta, il ruolo primario delle cianofite nei processi di incrostazione.

CARATTERI MICROSTRUTTURALI DELLE LITOFACIES PIU' DIFFUSE	
LITOFACIES	CARATTERI MICROSTRUTTURALI
T. microermali T. stromatolitici	Mosaici microcristallini. Micrite e microspatite tendono ad organizzarsi in microstrutture "arborescenti" (incrostazioni su cianofite).
T. microermali T. fitoclastici	Mosaici porfirotopici. I cristalli di dimensioni maggiori (da qualche centesimo a circa 1 mm) che possono apparire di forma molto irregolare mostrano inclusioni di filamenti o "ciuffi" algali (cianofite). Talora vi sono evidenze di associati processi di incrostazione direttamente sui supporti vegetali (pareti rivestite da cristalli di calcite limpida disposti a palizzata, su cui poi si impiantano comunità algali).
T. stromatolitici	Alternanze abbastanza regolari di lamine chiare e di lamine scure con giacitura molto variabile (da suborizzontale a subverticale). Le lamine chiare sono formate da macrocristalli subedrali (fino a qualche millimetro di lunghezza) che si accrescono perpendicolarmente alle lamine stesse e tendono ad organizzarsi in microstrutture radiali le quali mostrano inclusioni di filamenti algali (cianofite). Le lamine scure sono più ricche di materia organica e, in genere, molto sottili (orizzonti micritici). Talora c'è evidenza di processi "erosivi" verificatisi tra la formazione di lamine chiare e lamine scure.

T. stromatolitici T. microermali T. fitoermali T. fitoclastici T. tubolitici T. oncolitici	Alternanze più o meno regolari di lamine micritiche e di lamine spatiche con giacitura più o meno orizzontale o formanti guaine attorno ad originali supporti (le lamine sono, in questo caso, incomplete e più irregolari). Cristalli da anedrali a subedrali (dimensione media 0,05 mm) e leggermente "torbidi" nelle lamine spatiche.
T. fitoermali (a muschi) T. microermali (a micro-tuboli isorotati)	Mosaici quasi equidimensionali (cristalli da pochi centesimi di millimetro fino a qualche millimetro), formati da spatite da euedrale a subedrale più o meno "torbida". Veli micritici segnano i limiti fra i cristalli o possono conservarsi come partiture, più o meno perpendicolari agli assi "C", all'interno dei cristalli stessi.
Calceiruditi o calcareniti Fitoclastiche T. fitoermali T. fitoclastici	Tessiture "criptoalgali", non laminate originate da piccoli cristalli (dimensioni 0,04 mm a 0,1-0,3 mm circa) che si organizzano in sferule (< 1 mm) che si accrescono e si fondono irregolarmente, lasciando tra loro numerose cavità. Nelle sferule i cristalli spatici ("torbidi" e con inclusioni di tipo batterico?) mostrano una disposizione non perfettamente radiale; uno o più rivestimenti periferici micritici variamente lobati tappezzano le cavità tra le sferule e si proiettano al loro interno. Diffusi processi di micritizzazione e ricristallizzazione.

TABELLA 3. Caratteri microstrutturali dei vari tipi di incrostazioni dei travertini dell'Italia meridionale.

(e) Mosaici quasi equidimensionali di spatite da euedrale a subedrale. In questi mosaici i cristalli, più o meno torbidi, possono presentare dimensioni variabili (da pochi centesimi di millimetro fino a qualche millimetro). Veli micritici segnano in genere i limiti fra i cristalli e possono conservarsi, come inclusioni, al loro interno.

Questi caratteri microscopici sono tipici in particolare della tessitura di travertini fitoermali a muschi, e possono riscontrarsi anche in travertini microermali a microtubuli isorientati.

(f) Sferule. La organizzazione generale dei cristalli in questo caso produce piccole strutture emisferiche (talora associate in festoni sui margini di cavità) o sub-sferiche (sferule) che si raggruppano lasciando spazi vuoti di forma irregolare (fig.22). Le sferule, che hanno diametro di 0.5-1 mm, sono formate da cristalli generalmente anedrali (dimensioni di circa 0.04 mm a circa 0.1-0.3 mm), con disposizione non perfettamente radiale, e da uno o più rivestimenti periferici micritici variamente lobati. Nei cristalli spatitici si possono notare, talora più chiaramente, piccole inclusioni di forma allungata (batteri?). Diffusi processi di micritizzazione e di ricristallizzazione, più o meno spinti, rendono comunque problematica l'interpretazione dei caratteri originari delle incrostazioni. Anche queste, tuttavia, sembrano riconducibili a processi di precipitazione biogenica ad opera di cianofite e di batteri che inducono la formazione di tessiture criptoalgali non laminate ("non laminated cryptoalgal fabrics" in Monty, 1976).

Questi caratteri microstrutturali possono riscontrarsi in calciruditi e calcareniti fitoclastiche, in travertini fitoclastici e in travertini fitoermali.

Per un quadro riassuntivo dei caratteri microstrutturali riscontrati nelle litofacies più diffuse dei travertini dell'Italia meridionale si veda la Tabella 3.

4. DIAGENESI

Nei travertini processi deposizionali ("incrostazione") e diagenetici sono di regola strettamente interconnessi. In particolare la cementazione, sia in ambiente freatico che in ambiente vadoso contribuisce in modo determinante alla litificazione delle masse travertinose. Oltre alla cementazione, altri processi diagenetici possono interessare più o meno intensamente i travertini in fase sindeposizionale (diagenesi precoce). Data la rapidità con cui la materia organica viene intrappolata e decomposta (azione batterica) e la facilità con cui le acque possono intensamente circolare in questi depositi

altamente porosi e permeabili, non è possibile tracciare nei travertini un limite netto tra incrostazione primaria e diagenesi.

Ruolo primario in fase di diagenesi precoce esercitano comunque i batteri. A loro in particolare si devono i diffusi processi di micritizzazione (fig.23) che tendono ad omogeneizzare i caratteri microstrutturali originali con una riduzione della taglia dei cristalli di precipitazione primaria (Casanova, 1981; cfr. anche fig.6a e fig.6b in D'Argenio ed al., 1983). Essi intervengono inoltre nel sedimento appena deposto con la creazione di microambienti in cui aumenta la pressione parziale della CO_2 e si instaura un "clima" favorevole ai processi di soluzione. Questi a loro volta "caricano" le acque circolanti facilitando i successivi processi di riprecipitazione (fig.23), non appena dalle stesse acque in circolazione può sfuggire anidride carbonica. Si creano così le condizioni adatte per lo sviluppo di un diffuso microcarsismo che trova la sua tipica manifestazione nelle fasce marginali facilmente esposte (margini di "vasche", aree palustri). Nelle zone di cascata si instaurano invece condizioni adatte per la formazione, anche in fase sindeposizionale, di strutture speleotemiche che possono raggiungere grandi dimensioni (Golubic, 1969), (fig.24).

L'azione distruttiva combinata di funghi, batteri ed altri organismi endolitici (biokarst in Schneider ed al., 1983) può facilmente interferire con i processi di incrostazione, in particolare nei piccoli ambienti coperti da acque molto basse, modificandone in vario modo le caratteristiche originarie (diagenesi di croste lacustri, Golubic, 1969; Schneider ed al., 1983).

Nei travertini dunque i processi di incrostazione e di diagenesi (micritizzazione, azione di organismi endolitici, neomorfismo, soluzione diffusa, precipitazione di cementi secondari limpidi in cavità, processi di alterazione etc.) possono facilmente coesistere, sovrapporsi e sostituirsi continuamente l'un l'altro. Ciò può provocare modificazioni spinte fino a rendere estremamente problematica l'interpretazione dei caratteri originali di una litofacies e la ricostruzione della successione degli eventi che hanno agito dopo la deposizione.

Ad ogni modo, anche se i processi postdeposizionali possono contribuire ad omogeneizzare più litofacies che appaiono convergenti sotto il profilo diagenetico, possiamo ritenere in linea di massima che esiste nei depositi di travertino una certa rispondenza tra facies sedimentarie e facies diagenetiche.

5. ASSOCIAZIONI DI LITOFACIES

Stratificazione, superfici di erosione, orientamento dei fitoclasti (o delle fitostrutture in genere) e laminazioni sono le principali strutture sedimentarie che possono presentarsi più o meno associate nei vari depositi di travertino finora studiati.

La loro analisi e interpretazione, assieme a quelle delle tessiture e delle microstrutture, è importante in un lavoro di ricostruzione ambientale basato sull'individuazione di un certo numero di associazioni di litofacies. Infatti queste associazioni formano dei corpi sedimentari caratterizzati da una loro geometria che è il riflesso degli ambienti di deposizione (fig.2, nel testo). Tali geometrie, quando viste nel più ampio contesto della loro distribuzione areale e verticale e in relazione all'evoluzione generale del sistema deposizionale, possono consentire la formulazione di un modello genetico.

Le seguenti associazioni di litofacies sono state riconosciute nei casi studiati finora:

- (1) Sabbie calcaree con livelli di travertino
- (2) Calcareniti fitoclastiche e travertini fitoermali.
- (3) Travertini fitoclastici fini e travertini stromatolitici
- (4) Travertini fitoclastici grossolani, travertini microermali e stromatolitici
- (5) Travertini micro-fitoermali e stromatolitici
- (6) Travertini fitoermali.

5.1. Sabbie calcaree con livelli di travertino

Sabbie calcaree, con intercalazioni lentiformi di travertini formano le parti alte delle placche di travertino, ma possono rinvenirsi anche nelle parti basali o come intercalazioni. Le sabbie sono caratterizzate da granulicalcarei tra cui si possono riconoscere fitoclasti di taglia generalmente arenitica, spesso formati da frammenti di fusticini e/o oogoni di caracee e fossili (gasteropodi e ostracodi dulcicoli).

Le litofacies travertinose sono rappresentate da calciruditi e da calcareniti fitoclastiche, da travertini fitoermali e fitoclastici e da travertini stromatolitici.

Sono facilmente riscontrabili gli effetti della diagenesi vadosa (concrezioni, livelli arrossati, orizzonti di decalcificazione etc.) che indicano prolungate interruzioni nella sedimentazione e processi pedogenetici.

I processi di cementazione, presumibilmente controllati da particolari li-

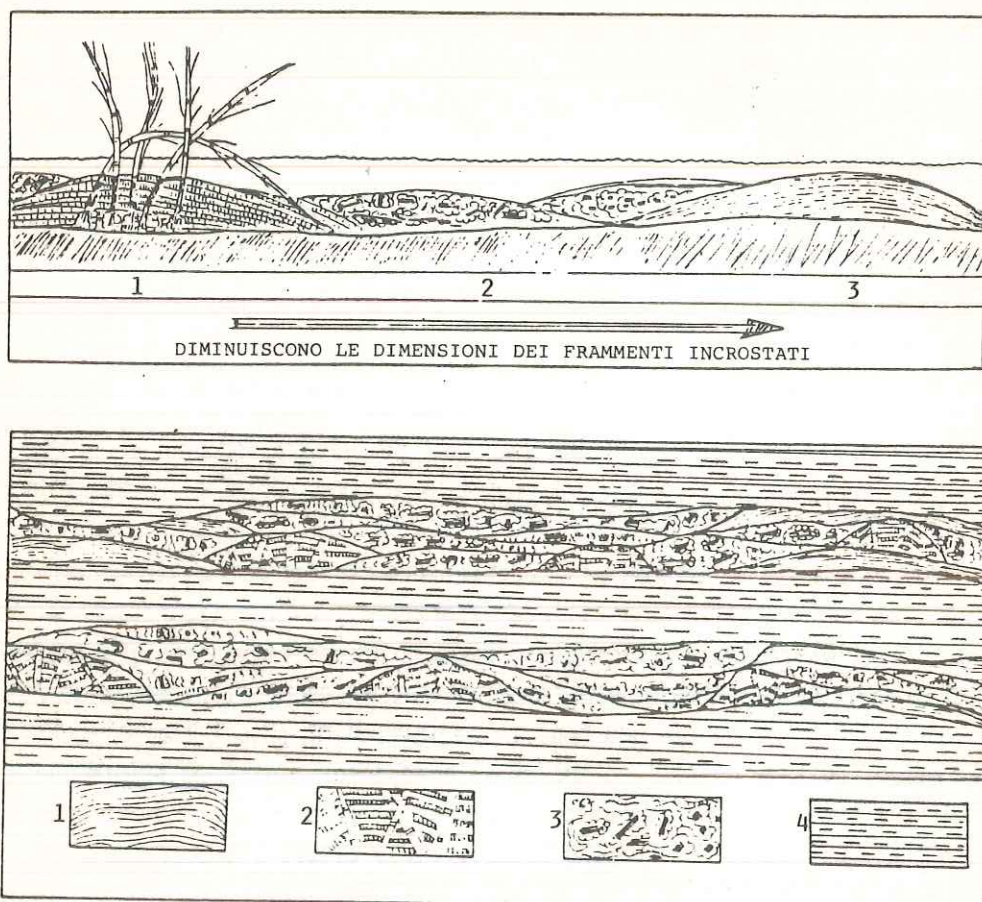


Fig.2 - Schema delle relazioni tra alcune litofacies travertinose (da Buccino, ed al., 1978).

In alto: 1. Travertini microtermali e fitoermali; 2. Travertini fitoclastici; 3. Travertini stromatolitici.

Ipotetica sezione che mostra solo alcuni di tanti possibili modi di organizzarsi delle litofacies travertinose, che in questo caso si vanno formando in una vasca limitata dai travertini stromatolitici (a destra). Questa piccola diga può ispessirsi, progredendo al contempo verso monte (cioè verso sinistra nella sezione) e facendo aumentare così l'inclinazione del pendio.

In basso: 1. Travertini stromatolitici; 2. Travertini microtermali e fitoermali; 3. Travertini fitoclastici; 4. Sabbie calcaree.

In questo caso alle associazioni di litofacies di travertini autoctoni ed alloctoni si alternano verticalmente sabbie calcaree a caracee che testimoniano inondazioni permanenti dei luoghi deposizionali (facies "lacustri"). Si veda anche la fig.25 fuori testo.

velli permeabili, sono di regola confinati in bande suborizzontali.

Queste associazioni litologiche formano nel complesso corpi tabulari stratificati (fig.25) ed estesi arealmente; possono essere interpretate come momenti in cui i processi di incrostazione si verificano con minore intensità mentre si ha la tendenza all'instaurarsi di un regime deposizionale di tipo lacustre molto basso e/o di tipo palustre, che può frequentemente evolvere in un regime francamente lacustre.

Questa associazione di litofacies può considerarsi quindi il prodotto di ambienti "lacustri" che si sviluppano al passaggio tra un regime in cui i travertini si depositano attivamente ed uno in cui i processi di incrostazione sono molto poco diffusi o non si verificano affatto.

5.2. Calcareniti fitoclastiche e travertini fitoermali

Associazioni di calciruditi-calcareniti fitoclastiche e di travertini fitoclastici e fitoermali in livelli lentiformi, disposti orizzontalmente.

I tipi litologici più ampiamente rappresentati costituiscono litofacies miste di travertini fitoermali e fitoclastici, in quanto il travertino fitoermale appare "immerso" in una frazione detritica di tipo fitoclastico (fig. 26). Nella frazione detritica, che da sola va a costituire la litofacies calciruditica-calcarenitica associata, i granuli (fitoclasti e frammenti di incrostazione su foglie) presentano spigoli vivi, disposizione irregolare e dimensioni estremamente diverse. La selezione granulometrica è generalmente scarsa o assente. A luoghi si osservano passaggi a livelli molto ricchi in foglie le quali mostrano, di regola, una disposizione molto irregolare. Nei differenti livelli sono presenti, in quantità più o meno abbondante, gusci di gasteropodi polmonati di ambiente palustre (fig.27). Le modificazioni diagenetiche (cementazione diffusa, micritizzazione e altri processi diagenetici) sono generalmente spinte e talora rendono problematica l'interpretazione dei caratteri microstrutturali originari.

Queste associazioni di litofacies formano nel complesso corpi tabulari estesi arealmente e privi di stratificazione. Presentano in genere un certo grado di omogeneità e soltanto scarse variazioni locali. Testimoniano momenti in cui i processi di incrostazione interessano ambienti marginali caratterizzati da un rigoglioso sviluppo della vegetazione e da gasteropodi polmonati. Questi ambienti possono subire temporanee inondazioni che provocano rapidi processi distruttivi, accumulo di materiale detritico in massa e facile ristagno delle acque.

Per i loro caratteri d'insieme possiamo interpretare queste associazioni come facies palustri.

5.3. Travertini fitoclastici fini e travertini stromatolitici

Formano associazioni più o meno ricorrenti e caratterizzano le parti basali delle placche di travertino.

L'associazione delle litofacies travertinose è data prevalentemente da travertini fitoclastici arenitici, da travertini stromatolitici con lamine micritiche e spatiche in giacitura generalmente suborizzontale, da travertini microermali in strutture domiformi e da calcareniti-calciruditi fitoclastiche. I passaggi laterali e verticali tra le varie litofacies sono rapidi e frequenti. Le strutture da corrente sono rare o assenti. Le modificazioni diagenetiche sono più o meno spinte e sono da riferire a processi di micritizzazione, neomorfismo, soluzione e riprecipitazione di cementi tardivi con occlusione di cavità primarie e secondarie (cementazione in ambiente freatico). Esse interessano in vario modo le differenti tessiture rendendo talora problematica l'interpretazione dei caratteri originari.

Queste associazioni formano nel complesso corpi tabulari estesi arealmente e con stratificazione più o meno distinta, anche se gli strati si chiudono lateralmente costituendo dei livelli lentiformi. La disposizione degli strati è suborizzontale, ricalcando la debole inclinazione di un antico pendio poco acclive.

5.4. Travertini fitoclastici grossolani, travertini microermali e stromatolitici

In questo caso si ha un maggior numero di litofacies rispetto all'associazione precedente. Queste litofacies però si raggruppano fondamentalmente allo stesso modo, i passaggi laterali sono sempre rapidi e frequenti e compaiono strutture da corrente.

I travertini fitoclastici sono in gran parte ruditici e talora i fitoclasti presentano un certo grado di embriciatura. Nelle calcareniti e calciruditi fitoclastiche possono essere inglobati ciottoli di travertino più o meno arrotondati. I travertini microermali formano strutture domiformi e strutture a sottili e irregolari strati sovrapposti (in cui i microtubuli sono isorientati), passando a travertini stromatolitici caratterizzati dalla presenza di lamine chiare e lamine scure a disposizione da subverticale a suborizzontale e da "microvaschette" sulle loro superfici di accumulo. L'andamento delle lamine da subverticale a suborizzontale testimonia un processo di deposizione su una originaria superficie più o meno inclinata (fig.28). Anche i travertini fitoermali, quando presenti, mostrano in genere fitostrutture inclinate ed isorientate. Diffusi processi erosivi provocano la forma-

zione di canali, successivamente colmati da ciottoli travertinosi arrotondati o da pisoliti inorganiche.

La varie tessiture appaiono generalmente ben conservate. Le modificazioni diagenetiche, quasi tutte di ambiente freatico-vadoso (micritizzazione, neomorfismo etc.), sono poco spinte e si manifestano precocemente. In molti travertini stromatolitici i cristalli delle lamine chiare sono interessati da processi neomorfici; essi si accrescono verso l'alto in continuità ottica, attraversando le lamine scure e conservando traccia al loro interno dei sottili orizzonti micritici.

Anche in questo caso si hanno nel complesso corpi tabulari alquanto estesi arealmente caratterizzati da stratificazione più o meno inclinata.

Qui, come nel caso precedente, le associazioni di litofacies rappresentano momenti in cui i processi di incrostazione tendono a diffondersi su un pendio che può essere anche alquanto acclive. Su una superficie del genere i processi di incrostazione tendono a verificarsi con velocità diversa in funzione delle locali variazioni di acclività dell'originario pendio. Ciò può portare anche alla formazione di sistemi di "vasche" poco profonde (si veda la successiva associazione).

Questo tipo di associazione viene interpretata come facies di pendio acclive.

5.5. Travertini micro-fitoermali e stromatolitici

Alternanze più o meno regolari di travertini fito e/o microermali e travertini stromatolitici, associati a travertini fitoclastici e a calcareniti-calciruditi fitoclastiche. Le intercalazioni sabbiose sono molto rare o assenti. Le varie litofacies affiorano in livelli lentiformi (da pochi centimetri a qualche metro di spessore, da qualche metro a qualche decina di metri di lunghezza) e formano complessivamente corpi piano convessi. Possono non essere rappresentate tutte le litofacies oppure una delle litofacies può prevalere sulle altre, indicando un perdurare nel tempo di specifiche condizioni deposizionali. Sono anche diffusi i travertini oncolitici o a pisoliti batteriche e i travertini bibliolitici. I passaggi tra le litofacies sono gradualissimi. Le strutture da corrente sono in genere indicative di acque che fluiscono più o meno lentamente. Bioerosione (ad opera di funghi e/o altri organismi endolitici), micritizzazione e processi di cementazione in ambiente prevalentemente freatico interessano in vario modo le diverse tessiture.

Questo tipo di associazione sembra essere il prodotto di fasi in cui si ha un intenso sviluppo dei processi di incrostazione e si individuano caratteristiche "vasche", bacini che hanno da qualche centimetro a pochi decime-

tri di profondità e sono sede di processi di sedimentazione detritica e di incrostazione. Questi bacini, che costituiscono dei sistemi di "vasche" variamente anastomizzati e degradanti nell'insieme verso valle, sono occupati verso l'interno dai travertini microermali e/o fitoermali, dai travertini fitoclastici e dalle calciruditi e calcareniti fitoclastiche mentre ai margini si formano i travertini stromatolitici. Le acque scorrenti traboccano dai loro margini e fluiscono nelle vasche a quote più basse.

Queste associazioni di litofacies, in analogia con i modelli attualistici di riferimento, sia relativi ad ambienti di acque fredde (Golubic, 1969; Casanova, 1981) che di acque calde (Weed, 1889; Allen e Day, 1935; Love e Keefer, 1975), (fig.30), possono essere interpretate come facies di gradinata di vasche.

5.6. Travertini fitoermali

Prevalenti incrostazioni su briofite (travertini fitoermali e travertini microermali-fitoermali a muschi) in livelli subverticali, talvolta con forme come di drappeggi che si susseguono anche per molti metri, costituendo pacchi di strati subverticali che si appoggiano in discordanza sui depositi precedenti. Queste strutture biocostruite più o meno ricche di spazi vuoti, sono caratterizzate da un accrescimento a quinte affiancate e possono raggiungere dimensioni notevoli (anche 50 metri di altezza e qualche centinaio di metri di lunghezza). I livelli a muschi ora descritti testimoniano il progredire di un'antica cascata: la successione risultante si dispone complessivamente a formare una semicupola rispetto al substrato su cui appoggia solo nella parte alta, a mo' di "arco rampante".

In fase di diagenesi molto precoce le grandi dimensioni di queste cavità favoriscono la diffusione di processi di dissoluzione e la precipitazione di cementi di tipo vadoso. Infatti, mentre sulla superficie esterna della semicupola o "volta", sotto l'azione delle acque che fluiscono rapidamente, i processi di incrostazione continuano a verificarsi attivamente, regolati dalla continua crescita di muschi e alghe, all'interno il materiale organico incorporato viene rapidamente decomposto dai batteri (Golubic, 1969). Si genera così, oltre al processo di soluzione, una successiva riprecipitazione con formazione di cementi stalattitici.

Questo tipo di associazione di litofacies può essere interpretato come facies di cascata.

LITOFACIES DEI TRAVERTINI DELL'ITALIA MERIDIONALE				TAR. I V A	
	1	2	3		
ASSOCIAZIONI	Sabbie calcaree con livelli di travertino	Calcareniti fitoclastiche e travertini fitoermali	Travertini fitoclastici fini e travertini stromatolitici		
PRINCIPALI LITOFACIES (in ordine di importanza)	-Sabbie calcaree a caracae -Calcareniti-calciruditi fitoclastiche (lenti) -Travertini fitoermali, stromatolitici e fitoclastici (lenti)	-Calciruditi e calcareniti fitoclastiche -Travertini fitoclastici e fitoermali -Travertini bibliolitici	-Travertini fitoclastici fini -Travertini stromatolitici -Travertini microermali -Calcareniti fitoclastiche		
STRUTTURE SEDIMENTARIE	Stratificazione nelle sabbie con intercalazioni di lenti di travertini e/o di conglomerati fluviali	Selezione granulometrica dei fitoclasti da scarsa ad assente Assenza di stratificazione	Alternanze di lamine micritiche e spatiche nei travertini stromatolitici Strutture microermali domiformi Stratificazione più o meno distinta		
PROCESSI DIAGENETICI	Paleosuoli, orizzonti di decalcificazione o di concrezioni	Soluzione e micritizzazione precoci, neomorfismo, cementazione in ambiente freatico	Soluzione e micritizzazione precoci, neomorfismo, cementazione in ambiente freatico		

FOSSILI (inclusi i supporti vegetali)	Gasteropodi polmonati, ostracodi, caracee (oogoni, fusticini)	Gasteropodi polmonati Pianta palustri, foglie (modelli)	Cianofite (filamentari), microfite
FORMA DEI CORPI SEDIMENTARI	Corpi sabbiosi tabulari con lenti di travertino	Corpi tabulari non stratificati	Corpi tabulari formati da strati lenticolari
ACQUE "MADRI" E LORO IDRODINAMICA	Acque spesso stagnanti con occasionali incursioni di acque fluviali e/o di acque calcaree	Acque calcaree a lento deflusso con occasionali inondazioni	Acque calcaree calde o fredde debolmente canalizzate, talora con flussi laminari
AMBIENTE DI DEPOSIZIONE	"Lacustre" (fluvio-lacustre) subordinatamente palustre	Ambiente palustre con frequenti incursioni di acque calcaree	Pendii poco acclivi
AZIONE MORFOLOGICA SUL SUBSTRATO	Contribuiscono a riempire piatte depressioni fluvio-lacustri nei fondovalle e al piede di pendii	Contribuiscono a colmare depressioni palustri generalmente al piede di pendii	Rivestono il piede di deboli pendii
AREA TIPICA	Tanagro	Tanagro Kocchetta a Volturno	Tanagro

LITOTAFIES DEI TRAVERTINI DELL'ITALIA MERIDIONALE				TAB. IV B	
	4	5	6		
ASSOCIAZIONI	Travertini fitoclastici grossolani, travertini microermali e stromatolitici	Travertini micro-feroermali e stromatolitici	Travertini fitoermali		
FARETTALI LITOTAFIES (in ordine di importanza)	- Travertini fitoclastici grossolani - Travertini microermali (subordinatamente fitoermali) - Travertini stromatolitici - Calciruditi, calcar. fitoclastici che e travertini bibliolitici	- Travertini microermali e travertini fitoermali - Travertini stromatolitici - Travertini fitoclastici - Calcir. e calcar. fitoclastiche - Travertini bibliolitici - Travertini oncolitici	- Travertini fitoermali - Travertini microermali		
SERIE SUCCESSIONARIE	Fitostrutture inclinate e isorientate verso valle; microvaschette nei travertini stromatolitici; canali riempiti da ciottoli travertinosi arrotondati. Pisoliti "inorganiche"	Vasche con bordi stromatolitici Oncoliti singole o multiple Pisoliti batteriche	Clinostratificazione con strati anche verticali (drappeggi)		
PROCESSI DIAGNETICI	Processi diagenetici (micritizzazione, neomorfismo) generalmentemente poco sviluppati; cementazione in ambiente freatico e vadoso	Bioerosione Micritizzazione Cementazione in ambiente freatico	Soluzione anche molto intensa Bioerosione Cementazione di tipo vadoso anche tardiva		

FOSSILI (inclusi i supporti vegetali)	Cianofite (filamentari) Microfite e macrofite (foglie)	Cianofite (filamentari) e microfite Oncoliti	Prevalenti briofite
FORMA DEI CORPI SEDIMENTARI	Corpi tabulari con irregolare clinostratificazione	Corpi piano-convessi formati dalla sovrapposizione di sistemi di vasche degradanti	Corpi clinostratificati formati da drappaggi stratiformi in giacitura subverticale, spesso solo in alto raccordati al substrato ("archi rampanti")
ACQUE "MADRI" E LORO IDROCLINAMICA	Acque calcarifere calde o fredde canalizzate su substrato inclinato e accidentato	Flussi laminari di acque calcarifere calde o fredde	Flussi rapidi di acque calcarifere canalizzate
AMBIENTE DI DEPOSIZIONE	Pendii acclivi	Gradinate di vasche	Cascate e rapide
AZIONE MORFOLOGICA SUL SUBSTRATO	Rivestono i pendii contribuendo ad accrescerne l'acclività. Possono convergere verso il fondo valle e formare sbarramenti	Ricoprono in discordanza altri corpi travertinosi e danno ai pendii una forma a gradonature più o meno accentuate	Ricoprono altri corpi travertinosi con forti discordanze; creano e mantengono forti dislivelli con raccordi anche verticali a mo' di archi rampanti
AREA TIPICA	Pontecagnano Rocchetta a Volturno	Rocchetta a Volturno	Rocchetta a Volturno

6. RIPILOGO

1. I travertini dell'Italia meridionale costituiscono masse lentiformi di carbonati incrostatati che si sono depositati in depressioni morfologico-strutturali dell'Appennino durante le fasi neotettoniche del Pleistocene. Alla formazione dei travertini concorrono differenti tipi litologici e per essi è possibile proporre una classificazione basata sui caratteri tessiturali.
2. Ruolo attivo nello sviluppo delle incrostazioni travertinose esercitano in particolare le cianofite e i batteri. Ciò è testimoniato dai caratteri biogenici delle tessiture (cryptoalgal fabrics in Monty, 1976; Casanova, 1981; D'Argenio ed al., 1983; Brancaccio ed al., in corso di stampa) messi particolarmente in evidenza dallo studio delle microstrutture.
Nei travertini i processi di incrostazione e di diagenesi (micritizzazione, attività di organismi endolitici, neomorfismo, soluzione diffusa, precipitazione di cementi secondari limpidi in cavità e processi di alterazione in genere) possono facilmente coesistere, sovrapporsi e sostituirsi l'uno all'altro. Ciò può provocare modificazioni spinte, fino a rendere estremamente problematica l'interpretazione dei caratteri originali di una litofacies e la ricostruzione della successione degli eventi che hanno agito dopo la deposizione. Ad ogni modo, anche se sotto il profilo diagenetico alcune litofacies possono apparire convergenti, esiste in linea di massima, nei depositi di travertino, una certa concordanza tra facies sedimentarie e facies diagenetiche.
3. I tipi litologici ricorrenti possono, in linea di massima, rientrare in due grandi raggruppamenti tessiturali, rappresentati dai travertini detritici e dai travertini autoctoni. Fra questi due raggruppamenti esistono naturalmente numerosi termini di passaggio che caratterizzano le tessiture intermedie o miste.

I travertini detritici sono formati prevalentemente da granuli incrostatati (fitoclasti) che conferiscono nell'insieme alla roccia una caratteristica tessitura "clastica". Questi granuli, di taglia da arenitica fino a ruditica grossolana, denotano un trasporto di solito limitato. Essi appaiono inoltre legati precocemente da incrostazione biogenica.

In base al loro contenuto in matrice si possono distinguere diverse litofacies (Travertini Fitoclastici, Calciruditi/Calcareniti Fitoclastiche e Sabbie Calcaree Fitoclastiche).

I travertini autoctoni derivano da rapidi processi di incrostazione che conservano le strutture vegetali nella loro posizione originaria. In base ai caratteri delle incrostazioni si distinguono: Travertini Strano-

tolitici, Travertini Microermali e Travertini Fitoermali. I travertini stromatolitici sono delle laminiti di tipo stromatolitico nel senso ampio del termine in quanto la formazione delle lamine è strettamente legata all'attività di comunità di cianofite e di batteri. Nei travertini microermali e nei travertini fitoermali le incrostazioni interessano piante igrofile inferiori e superiori, e risultano anch'essi per la gran parte condizionati dalla presenza di cianofite e batteri precipitanti; la loro porosità è generalmente elevata e così pure la permeabilità.

4. I vari tipi litologici si possono raggruppare in litofacies che vengono individuate anche in funzione della loro cartografabilità come singole litofacies o come loro associazioni.

Nei casi finora studiati sono state individuate le seguenti associazioni di litofacies che, in quanto caratterizzate da una loro geometria e da una loro distribuzione areale e verticale, risultano collegate agli originari ambienti deposizionali.

- (1) Sabbie calcaree con livelli di travertino: facies lacustri (fluvio-lacustri), subordinatamente palustri.
 - (2) Calcareniti fitoclastiche e travertini fitoermali: facies palustri.
 - (3) Travertini fitoclastici fini e travertini stromatolitici: facies di pendio poco acclive.
 - (4) Travertini fitoclastici grossolani, travertini microermali e stromatolitici: facies di pendio acclive (fig.29).
 - (5) Travertini micro-fitoermali e stromatolitici: facies di gradinate di vasche (fig.30).
 - (6) Travertini fitoermali: facies di cascata (fig.31) e di rapida (fig.32).
5. Gli ambienti deposizionali dei travertini sono controllati dalla morfologia del substrato e dall'acclività dei pendii iniziali. Le lenti travertinose tendono a modificare la morfologia preesistente costituendo sbarramenti e determinando a monte condizioni di ristagno (laghetti, aree palustri e simili), ovvero accentuando l'acclività dei pendii. La tracimazione di flussi laminari o canalizzati può rispettivamente produrre gradinate di vasche oppure rapide e cascate.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare il Prof. Bruno D'Argenio, con il quale ho iniziato circa dieci anni fa ad interessarmi dei problemi riguardanti la sedimentologia e la genesi dei travertini dell'Italia meridionale, per i continui inco-

raggiamenti e suggerimenti e per l'aiuto prestatomi nella elaborazione di questo lavoro.

Sono inoltre riconoscente ai professori Ludovico Brancaccio e Damiano Stanzone che, assieme al Prof. D'Argenio, hanno collaborato anche alle precedenti ricerche, consentendomi di affrontare lo studio dei travertini nel quadro di problematiche più generali e in maniera interdisciplinare.

Desidero infine ringraziare il Sig. Domenico Fiorentino, tecnico del Dipartimento di Scienze della Terra dell'Università di Napoli, per la fattiva collaborazione nella preparazione delle illustrazioni, Candida Russo e Alessandro Pino per la compilazione grafica delle tavole e Giovanna Danzeca che ha dattiloscritto il testo.

Questo lavoro è stato eseguito con il contributo M.P.I. 60%, anno 1984.

BIBLIOGRAFIA

- ALLEN E.T. & DAY A.L. (1935) - Hot springs of the Yellowstone National Park. Carnegie Inst. Washington Pub., 466, pp.525.
- BATHURSTH R.G.C. (1976) - Carbonate sediments and their diagenesis. (2nd enlarged ed.) Elsevier, New York, pp.658.
- BRANCACCIO L., D'ARGENIO B., FERRERI V., PREITE MARTINEZ M., STANZIONE D. & TURI B. (1985) - Caratteri tessiturali e Geochimici dei travertini di Rocchetta a Volturno (Molise). In corso di stampa nel Boll. Soc. Geol. It., Roma.
- BUCCINO G., D'ARGENIO B., FERRERI V., BRANCACCIO L., FERRERI M., PANICHI C. & STANZIONE D. (1978) - I travertini della bassa Valle del Tanagro (Campania): Studio geomorfologico, sedimentologico e geochimico. Boll. Soc. Geol. It., 97, pp.617-646.
- CASANOVA J. (1981) - Etude d'un milieu stromatolitique continental. Les travertins Plio-Pléistocènes du Var (France). Thèse du 3^e cycle en Géologie du Quaternaire, Univ. Aix-Marseille, pp.132.
- D'ARGENIO B., FERRERI M., FERRERI V. & STANZIONE D. (1981) - Travertine of southern Italy. Texture, geochemistry and sedimentary model. Abstract, 2nd Eur. Reg. Meet., I.A.S., pp.43-46, Bologna.
- D'ARGENIO B., FERRERI V., STANZIONE D. & BRANCACCIO L. & FERRERI M. (1983) - I travertini di Pontecagnano (Campania). Geomorfologia, Sedimentologia, Geochimica. Boll. Soc. Geol. It., 102, pp.123-136.
- DUNHAM R.J. (1962) - Classification of carbonate rocks according to depositional texture. In: Classification of Carbonate Rocks (W.E. Ham ed.). Am. Assoc. Petrol. Geologists. Memoir 1, pp.108-121.
- EMBRY A.F. & KLOVAN J.E. (1971) - A Late Devonian Reef Tract on north-eastern Banks Island N.W.T.. Bull. Can. Petrol. Geol., 19, pp.730-781.

- FOLK R.L. (1962) - Spectral subdivision of limestone types. In: Classification of Carbonate Rocks (W.E. Ham ed.), Am.Assoc.Petrol. Geologists. Memoir 1, pp.62-84.
- FOLK R.L. (1965) - Some aspects of recrystallization in ancient limestones. Soc.Econ.Paleont.Min.Spec.Publ., 13, pp.14-48, Tulsa.
- FOLK R.L. & CHAFETZ H.S. (1983) - Pisoliths (Pisoids) in Quaternary Travertines of Tivoli, Italy, pp.474-487. In T.M. PERYT (ed.) Coatd Grains. Springer-Verlag, Berlin,Heidelberg, pp.655.
- GARY M., MC AFEE R. & WOLF C.L. (ed.) (1974) - Glossary of geology. pp.805+52, A.G.I. Washington.
- GOLUBIC S. (1969) - Cyclic and noncyclic mechanism in the formation of travertine. Verh. Inter. Verein Limnol., 17, pp.956-961.
- GOLUBIC S. (1973) - The relationship between blue-green algae and carbonate deposits pp.434-472. In: N.G. CARR and B.A.WHITTON (eds.) The Biology of Blue-Green Algae. Blackwell, Oxford.
- LEIGHTON M.W. & PENDEXTER C. (1962) - Carbonate Rock types. In: W.E. HAM (ed.) Classification of Carbonate Rocks. A.A.P.G., mem.1, pp.33-61.
- LOGAN B.W., REZAK R. & GINSBURG R.N. (1964) - Classification and environmental significance of algal stromatolites. Journal of Geology, 72/1, pp.68-83.
- LOVE J.D. & KEEFER W.R. (1975) - Geology of Sedimentary Rocks in Southern Yellowstone Park. Wyoming U.S. Geol.Surv.Prof.Paper, 729/D, pp.60.
- MONTY C.L.V. (1976) - The origin and development of cryptoalgal fabrics pp. 193-250. In: M.R. WALTER (ed.) Stromatolites. Elsevier, New York, pp.790.
- PERYT T.M. (ed.) (1983) - Coated Grains. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, pp.655.
- SCHNEIDER J., SCHRÖDER H.G. & LE CAMPION-ALSUMARD T.H. (1983) - Algal Micro-Reefs-Coated Grains from Freshwater Environments pp. 284-298. In: T.M. PERYT (ed.) Coated Grains. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, pp.655.
- WALTER M.R. (ed.) (1976) - Stromatolites. Elsevier, New York, pp.790.
- WEED W.H. (1889) - Formation of travertine and siliceous sinter by vegetation of hot springs. U.S. Geol.Survey, 9th Annual Report for 1887-88, pp.619-676.

Questa nota era già stata presentata quando si è presa visione del lavoro di CHAFETZ H.S., FOLK R.L. (1984) - Travertines: depositional morphology and the bacterially constructed constituents. Journ. of Sed.Pet., 54, pp. 289-316.

Ci si ripromette di discutere in una prossima nota questo interessante lavoro nel quale si attribuisce ai batteri un ruolo litogenetico quasi esclusivo, sottovalutando tuttavia l'attività delle cianofite e, implicitamente, i travertini depositi da acque non termali.

Fig. 1-Bassa valle del Tanagro, Località Parrelle. Tessitura detritica; travertino fitoclastico rudittico (rudstone). I fitoclasti sono formati da frammenti di vegetali incrostati quasi equidimensionali. La matrice è assente. Questi caratteri suggeriscono processi di frammentazione e di accumulo quasi in situ, ad opera di correnti trattive che possono allontanare la eventuale frazione più fine.

Fig. 2-Bassa Valle del Tanagro, Località Stanfola. Tessitura detritica; calcirudite fitoclastica fine, con scarsa matrice. Anche in questo caso i caratteri tessuturali suggeriscono processi di frammentazione e di accumulo quasi in situ.

Fig. 3-Rocchetta al Volturno (Isernia). Località Taverna Porcareccia. Tessitura detritica: calcirudite-calcarene fitoclastica. L'assenza di selezione granulometrica (la taglia varia da rudittica grossolana ad arenittica fine) e la disposizione irregolare dei granuli, formati da fitoclasti di natura diversa e da frammenti di incrostazione su foglie, escludono l'azione determinante di correnti trattive nella formazione di questi depositi.

Fig. 4-Telesse (Benevento). Travertini a valle dell'abitato. Ostracodi in travertino fitoclastico. Positivo da sezione sottile. Miccoli paralleli. 65X

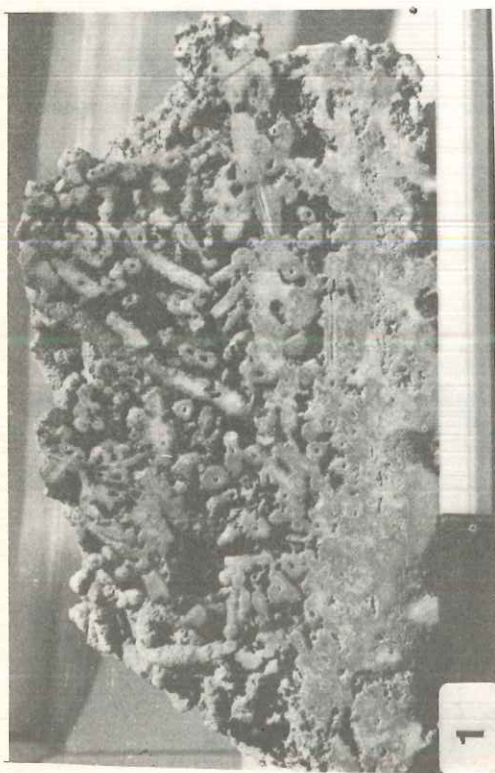


Fig.5-Telese (Benevento). Travertini a valle dell'abitato. Gasteropodi in travertino fitoclastico. Positivo da sezione sottile. Nicols paralleli. 65X

Fig.6-Rocchetta al Volturno (Isernia). Ad est di Masseria l'Isola. Tipici aspetti tessuturali di un travertino bibliolitico.

Fig.7-Pontecagnano (Salerno). Località Faiano. Tessitura detritica: in basso travertino fitoclastico (grainstone-rudstone fitoclastico) che passa verso l'alto (frece) a travertino formato essenzialmente da modelli esterni di foglie (travertino bibliolitico) che appaiono embriciate. Altezza del campione: circa 10 cm.

Fig.8-Pontecagnano (Salerno). Località Faiano. Tessitura detritica: travertino fitoclastico con subordinati frammenti di incrostazioni su foglie. Le incrostazioni negli spazi intergranulari hanno provocato lo sviluppo di un processo di "cementazione" precoce che lascia numerose cavità residue di forma irregolare (a) e dà origine ad una tessitura criptoaligale micronodulare (b).

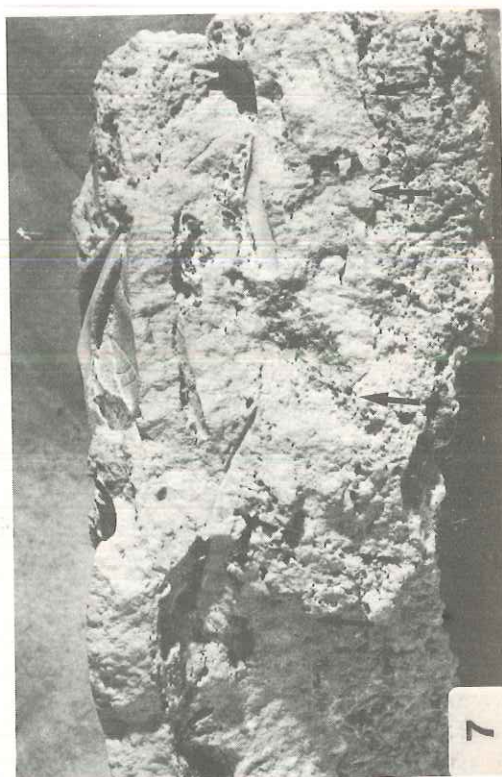


Fig. 9-Paestum (Salerno). Da una carota prelevata a circa 15 m di profondità in un sondaggio presso la sorgente Capo di Fiume. Oncolite con oogene di Charga al nucleo. I processi di incrostazione danno origine ad un'alternanza di lamine micritiche e di lamine spatliche concentriche e leggermente ondulate. Positivo da sezione sottile. Nicols paral-lele. Circa 45X

Fig. 10-Bassa Valle del Tanagro. Località Macchietelle. Travertino stromatolitico a spatite e micrite. Si notino le ondulazioni delle lamine e la notevole porosità interlaminare. Le plaghe più chiare delle lamine corrispondono alle strutture algali meglio conservate.

Fig. 11-Rocchetta al Volturno (Isernia). Località Quercetelli. Travertino stromatolitico a spatite. Si noti la regolare alternanza di lamine chiare, formate da grandi cristalli spatitici che si accrescono verso l'alto, e di lamine scure più sottili e meno porose. Altezza del campione: circa 15 cm.

Fig. 12-Pontecagnano (Salerno). Località Faiano. Superficie di accumulo di un travertino stromatolitico a spatite caratterizzata da "increspature" algali di misura centimetrica ("microvaschette"). Queste strutture sedimentarie suggeriscono rapidi flussi laminari nelle acque di deposizione.

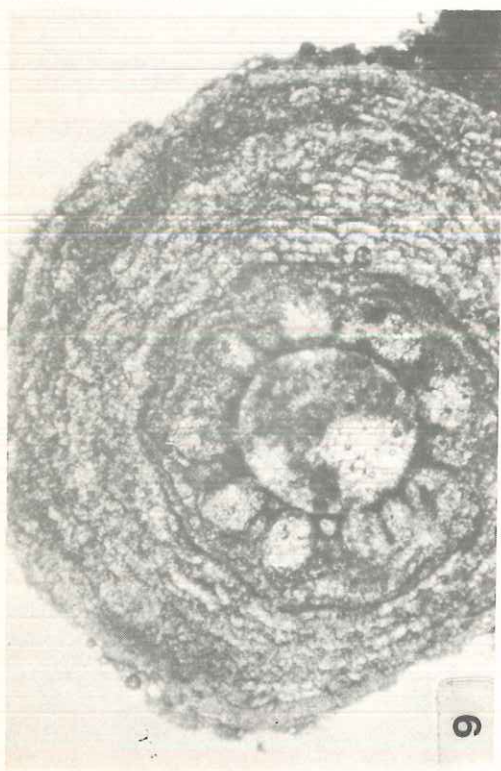


Fig.13-Rocchetta al Volturno (Isernia). Località Quercetelli. Travertino microermale caratterizzato da microtubuli variamente ramificati e intrecciati.

Fig.14-Rocchetta al Volturno (Isernia). Località Quercetelli. Travertino microermale a microtubuli inclinati ed isorientati.

Fig.15-Rocchetta al Volturno (Isernia). A valle della strada per la Cartiera. Travertino fitoermale "costruito" da incrostazioni su muschi.

Fig.16-Bassa Valle del Tanagro. Località S.Maria. Travertino fitoermale "costruito" da incrostazioni su vegetazione igrofila (macrofite) in posizione di crescita.

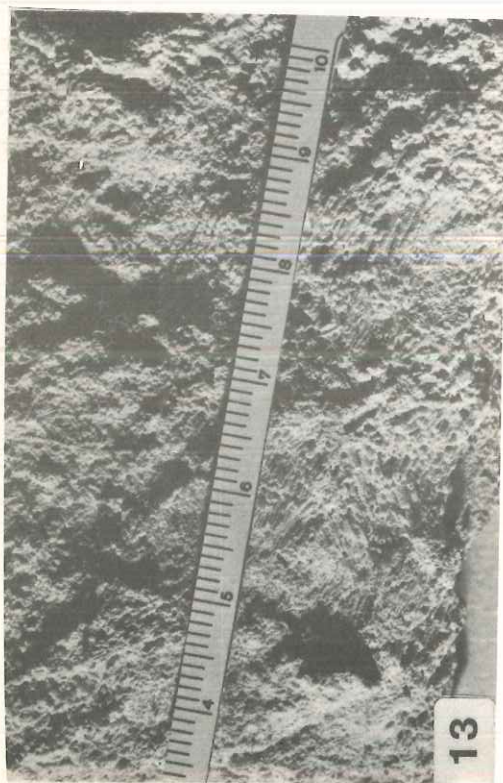
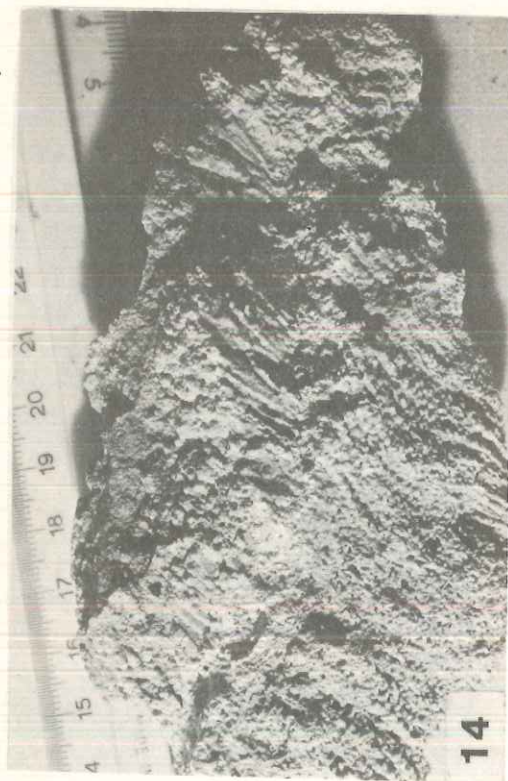


Fig.17-Rocchetta al Volturno (Isernia). Mosaico prevalentemente microcristallino nelle incrostazioni di un travertino microermale. L'organizzazione dei cristalli calcitici (micrite e microspatite) testimonia chiaramente l'importanza della componente algale (cianofite) nei processi di precipitazione primaria. Positivo da sezione sottile. Nicols paralleli. 35X

Fig.18-Rocchetta al Volturno (Isernia). Località Quercetelli. Mosaico con cristalli di dimensioni variabili nelle incrostazioni di un travertino microermale. Sono ben evidenti (al centro e in basso nella foto) i grandi cristalli di forma irregolare che conservano al loro interno gli originali filamenti che ne hanno condizionato la precipitazione. Positivo da sezione sottile. Nicols incrociati. 35X

Fig.19-Bassa Valle del Tanagro. Località Macchietelle. Organizzazione dei cristalli di precipitazione primaria in lamine micritiche e lamine spatiche nelle incrostazioni di un travertino fitoermale a canne. Le frecce indicano la presenza di inclusioni peloidali tra le lamine. Positivo da sezione sottile. Nicols paralleli. 65X

Fig.20-Rocchetta al Volturno (Isernia). Località Quercetelli. Grandi cristalli spatichi caratterizzanti le lamine chiare in un travertino stromatolitico a spatite. I cristalli sono disposti con gli assi "C" subverticali (l'alto è indicato dalla freccia) e mostrano inclusioni riconducibili a filamenti algali (cianofite),(1). Si noti l'elevata porosità intercristallina (2). Positivo da sezione sottile. Nicols incrociati. 35X

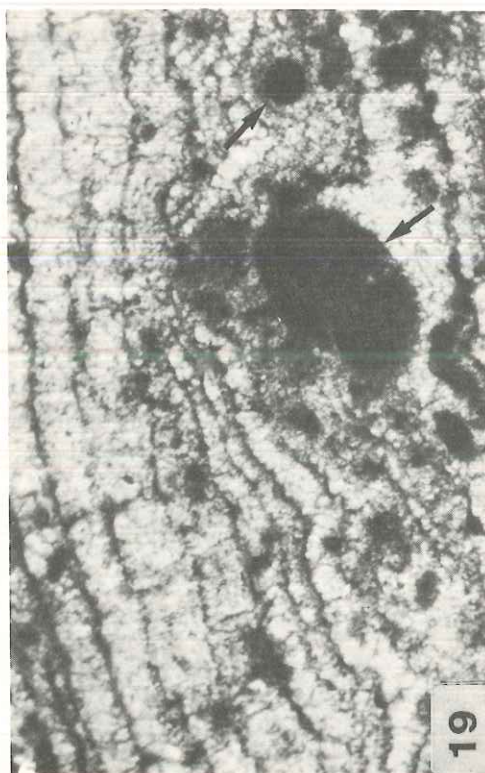
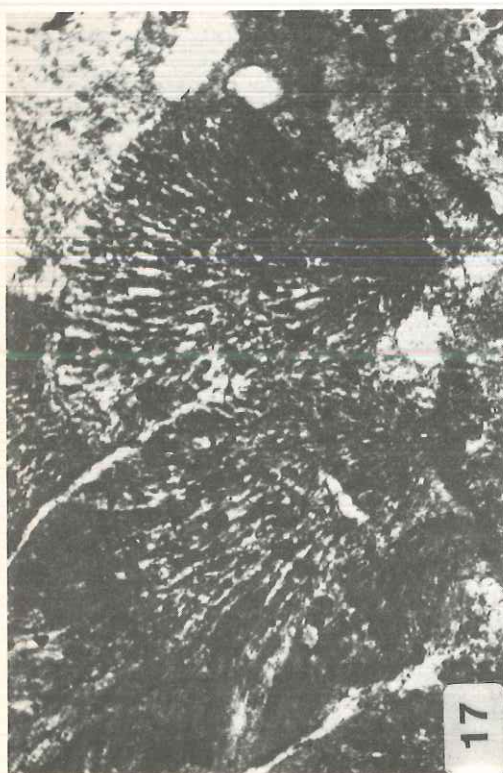
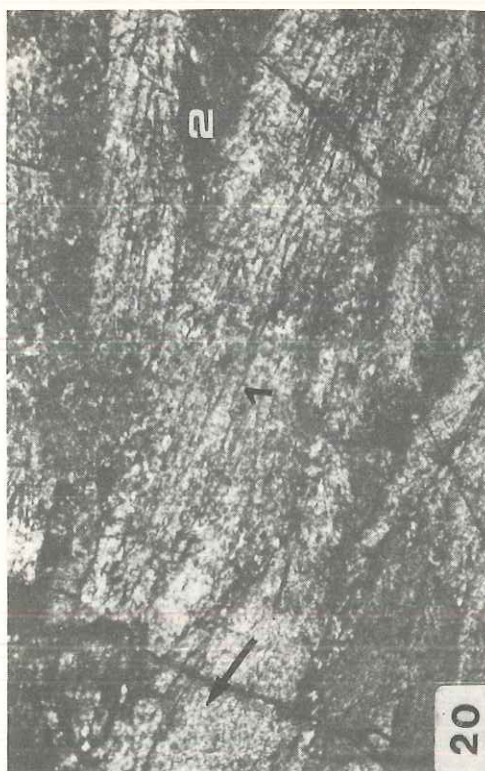
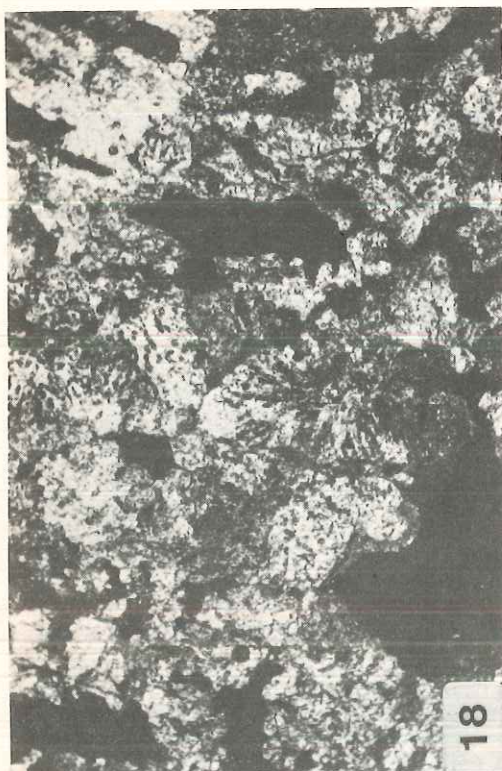


Fig.21-Rocchetta al Volturno (Isernia). Località Quercetelli. Dettaglio delle lamine di un travertino stromatolitico a spatiche. All'interno di grandi cristalli spatici (cristalli "zonati"), che si accrescono in continuità ottica e corrispondono al passaggio lamine chiare-lamine scure, si conservano sottili orizzonti micritici più o meno continui e ondulati. Positivo da sezione sottile. Nicols incrociati, 50X

Fig.22-Rocchetta al Volturno (Isernia). Località Taverna Porcareccia. Organizzazione dei cristalli di precipitazione primaria in una calcirudite-calcarenite fitoclastica. Si notino le piccole strutture emisferiche o subsferiche (sferule) indicate dalle frecce. Questi caratteri microstrutturali suggeriscono processi di precipitazione biogenica (cryptalgal fabric). Positivo da sezione sottile. Nicols paralleli, 35X

Fig.23-Bassa Valle del Tanagro. Località Macchietelle. Processi di micritizzazione (1) e di dissoluzione e riprecipitazione con neoformazione di mosaici calcitici secondari (2), rendono molto problematica l'interpretazione dei caratteri originari delle incrostazioni. Positivo da sezione sottile. Nicols paralleli, 65X

Fig.24-Rocchetta al Volturno (Isernia). A valle della strada per la Cartiera. Formazione di cementi stalattitici precoci in un travertino fitoermale a muschi (facies di cascata).

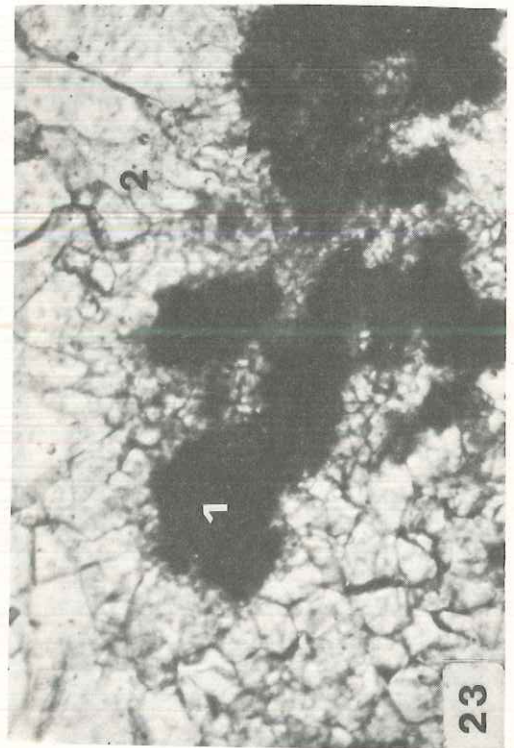
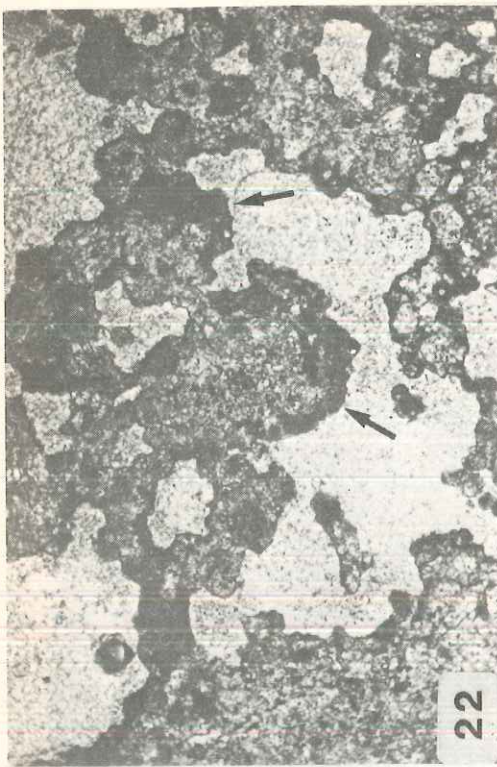


Fig.25-Bassa Valle del Tanagro. Località Urtau-
to. Una sezione nei travertini del Tana-
gro che mostra circa 25-30 metri di al-
ternanze di livelli di sabbie calcaree e
di livelli travertinosi. Facies "lacustre"
(fluvio-lacustre).

Fig.26-Rocchetta al Volturno (Isernia). Loca-
lità Taverna Porcareccia. Affioramento di
calciruditi-calcareniti fitoclastiche as-
sociate a travertino fitoermale. Facies
palustre. Le dimensioni sono date dal tac-
chino (cm10x15).

Fig.27-Rocchetta al Volturno (Isernia). Loca-
lità Taverna Porcareccia. Un particolare
del precedente affioramento che mostra
gusci di gasteropodi polmonati, di am-
biente palustre, inglobati nelle calci-
ruditi-calcareniti fitoclastiche. Facies
palustre.

Fig.28-Rocchetta al Volturno (Isernia). Loca-
lità Quercetelli. Affioramento di traver-
tino stromatolitico associato a traverti-
no microermale. Sono bene evidenti le co-
struzioni domiformi di travertino micro-
ermale-travertino stromatolitico caratte-
rizzate da lamine inclinate (da subverti-
cali a suborizzontali). Facies di pendio
occlive.

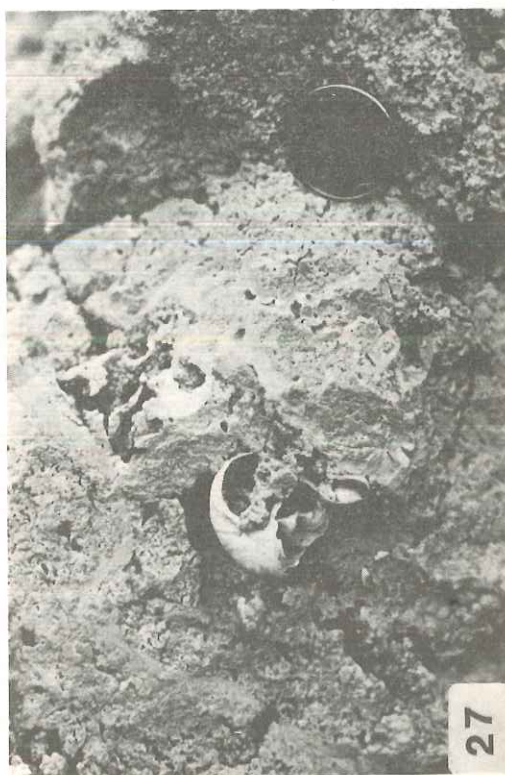
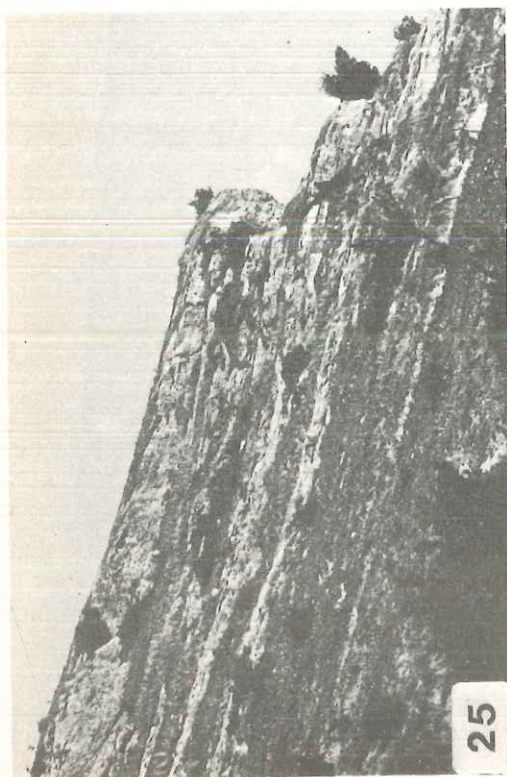


Fig.29-Pamükkale, Turchia. Deposizione di travertini lungo un pendio ad opera di acque calde. Le figure in alto, nella foto, danno un'idea delle dimensioni (foto L. Brancaccio).

Fig.30-Pamükkale, Turchia. Una gradinata di vasi con formazione di travertino ad opera di acque calde (foto L. Brancaccio).

Fig.31-Plitvice, Croazia. Deposizione di travertino in ambiente di cascata ad opera di acque fredde (foto B. D'Argenio).

Fig.32-Plitvice, Croazia. Deposizione di travertino in ambiente di rapida ad opera di acque fredde (foto B. D'Argenio).

